И. Н. Сергеев, В. С. Панферов

ЕГЭ 2011

C1

Математика

C2

Задача С3

C3

C4

Уравнения и неравенства

C5

C6

Под редакцией
А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Разработано МИОО

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

И. Н. Сергеев, В. С. Панфёров

ЕГЭ 2011. Математика
Задача С3
Уравнения и неравенства

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Москва
Издательство МЦНМО
2011

УДК 373:51
ББК 22.1я72
С32

Сергеев И. Н., Панфёров В. С.

С32 ЕГЭ 2011. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011. — 72 с.

ISBN 978-5-94057-665-5

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2011. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи С3.

Книга посвящена решению уравнений и неравенств. В ней рассмотрены и прокомментированы все основные типы уравнений и неравенств, соответствующие школьной программе по математике. Предложены различные методы их решения, которые применимы и к другим задачам ЕГЭ 2011 г.: типа С (С1, С5, С6) и типа В (В3, В7, В10, В11, В12). Кроме того, в книге собраны воедино необходимые справочные сведения по каждой теме, даны диагностические работы разного уровня, предложены задачи для самостоятельного решения, а также приведён список литературы для подготовки к экзамену.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по алгебре и началам анализа.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

ББК 22.1я72

ISBN 978-5-94057-665-5

Предисловие

Книга продолжает серию учебных пособий по математике под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко, посвященных подготовке к ЕГЭ по математике в 2011 г.

При решении практически любой математической задачи приходится производить преобразования числовых, алгебраических или функциональных выражений. И хотя сами эти преобразования не являются самоцелью, они представляют собой довольно эффективное средство (причём иногда — чуть ли не единственно возможное) для решения задачи.

Сказанное особенно относится к задачам на решение уравнений или неравенств. Именно таким задачам и посвящена настоящая книга, в которой рассмотрены основные типы уравнений и неравенств, а также различные методы их решений.

Читателю предлагаются несколько наборов диагностических задач. Каждый такой набор включает в себя рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические, содержащие модули (абсолютные величины) и комбинированные уравнения и неравенства. Начальная диагностическая работа содержит задачи, которые разбираются далее в каждом параграфе. Уровень сложности задач следующих шести диагностических работ возрастает с ростом номера работы.

В каждом параграфе приведены задачи для самостоятельного решения (тренировочные и подготовительные). В случае возникновения непреодолимых трудностей при решении каких-либо задач переходите к более простым, подготовительным задачам по соответствующей теме. После этого снова возвращайтесь к тренировочным задачам. В конце книги имеется список литературы для самостоятельной подготовки к экзамену.

Наши рекомендации таковы:

— выполните диагностическую работу и сверьте полученные Вами ответы с ответами в конце книги — каждая нерешенная задача и каждый неверный ответ является для вас сигналом к действию;

— внимательно прочитайте предложенные методические рекомендации и примеры решений всех задач диагностической работы, сравнив их с текстами ваших решений и обратив особое внимание на имеющиеся различия между ними;

— последовательно решайте диагностические работы 1—6 (расположенные в порядке возрастания трудности задач), перемежая их с тренировочными и диагностическими задачами — прежде всего по тем темам, которые вызывают наибольшие затруднения.

Надеемся, что навыки решения задач, предлагаемых в настоящей книге, помогут школьникам в будущем успешно сдавать самые разные экзамены по математике.

Авторы благодарны А. В. Семёнову, прочитавшему всю рукопись, сделавшему ряд содержательных замечаний и предложений, улучшающих текст в целом.

В подготовке настоящего издания большую помощь авторам оказали студенты механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова А. Трепалин, А. Годнева, О. Заплетина, И. Нетай, которые прорешали все задачи и выверили ответы к ним.

Авторы благодарны всем, кто сообщил об опечатках и прислал замечания к первому изданию.

И. Н. Сергеев, В. С. Панфёров

Введение

Первая часть (часть В) варианта ЕГЭ по математике представлена задачами с кратким ответом, вторая часть (часть С) состоит из шести задач с развернутым ответом.

Основной целью этой, так сказать, «вузовской» части варианта (в отличие от первой его части, носящей характер «зачета» по курсу математики средней школы) является дифференциация выпускников в отношении их возможностей дальнейшего обучения в вузах с различными требованиями к математической подготовке учащихся.

Задания всей части 2 в целом предназначены для проверки знаний на том уровне требований, который традиционен в вузах с профильным экзаменом по математике.

Итогом работы выпускника над каждой задачей типа С является представленные им на экзамене:

- ответ на поставленный в задании вопрос,
- текст решения задачи.

По большому счету, ответ к задаче также можно считать неотъемлемой частью ее *решения* (в широком смысле), что мы и подразумеваем в дальнейшем. Решение записывается в специальный бланк ответов № 2, выдаваемый выпускнику непосредственно на экзамене.

За решение задачи С3 на экзамене можно получить оценку в 0, 1, 2 или 3 балла. Не максимально возможное количество баллов за задачу ставится в том случае, если в ее решении присутствуют ошибки, неточности или недостатки обоснования. Подчеркнем, что на экзамене оценивание решения задачи должно производиться в строгом соответствии с заранее утверждёнными *критериями*.

Далеко не праздным является вопрос о том, *какие способы* решения задачи и записи ее ответа допустимы на едином государственном экзамене. Главным требованием к решению была и остается его *математическая правильность*, а именно:

- в ответ необходимо включить только верные значения искомой величины, причем все;
- форма записи ответа может быть любой из употребляемых в современной учебной литературе;
- текст решения должен служить реальным обоснованием (точнее, доказательством) правильности полученного ответа;
- при решении задачи любого содержания приемлемы любые математические методы — алгебраические, функциональные, графические, геометрические, логические, комбинаторные и т.д.;

• рациональность решения, равно как и его нерациональность, на экзамене во внимание не принимается.

Начиная с 2010 года, модель оценивания решений задач части С значительно изменена.

Новые критерии оценки основываются на следующих принципах:

• Проверяется только математическое содержание представленного решения; погрешности его оформления не являются поводом для снижения оценки.

• Ответ может быть записан в любом виде; оценивается не форма записи ответа, а его правильность.

• Степень подробности обоснований в решении должна быть разумно достаточной; претензии к решению, связанные с отсутствием ссылок на правомерно используемые стандартные факты и правила (как-то: формулы сокращённого умножения, формула корней квадратного уравнения, действия со степенями или логарифмами, свойства неравенств и многие-многие другие), не предъявляются.

• Решение задачи, в котором обоснованно получен правильный ответ, оценивается максимальным числом баллов.

• Наличие правильного ответа при полном отсутствии текста решения оценивается в ноль баллов.

• Некоторые погрешности решений, не оказавшие существенного влияния на его обоснованность и принципиальную правильность, могут расцениваться как описки и не приводить к снижению оценки.

• Если на каком-либо этапе решения допущена грубая ошибка, то другие его этапы, проведенные в работе правильно, могут быть, тем не менее, оценены положительно, в соответствии с критериями.

• При определении итоговой оценки решения выбирается максимально возможное число баллов, которое можно выставить за него в соответствии с утверждёнными критериями.

• При проверке оригинальных или нестандартных решений на экзамене вырабатываются частные критерии их оценки, соответствующие (аналогичные) общим.

Подготовка к предлагаемой форме экзамена по математике состоит *не в натаскивании* выпускника на какие-то определенные типы задач, а в систематическом и обстоятельном изучении самого предмета как на уроках в школе, так и в процессе самостоятельной работы ученика.

При подготовке к тренировочным и подготовительным заданиям нужно учесть следующие три аспекта.

• Во-первых, единый государственный экзамен в целом опирается, конечно же, на *школьную программу*. Поэтому уверенное знание программы по математике и хорошее владение ею — необходимое условие успешной сдачи ЕГЭ. Эта программа в основном определена и подкреплена огромным количеством самых разнообразных учебников. Однако среди обилия учебников по математике советуем выбирать те, что отличаются большей глубиной проникновения в излагаемый материал и рассчитаны на более вдумчивого учащегося. Эти качества учебников способны в перспективе оказать экзаменуемому существенную помощь.

• Во-вторых, чтобы подготовиться к какому-либо экзамену, вообще, нужно, для начала, изучить *историю вопроса*, а именно: узнать, какие задачи давались на экзамене в прошлые годы, какими методами предполагалось их решать, каковы были требования к их оформлению и т. п. Кроме того, следует сделать поправку на новые критерии оценивания, для чего имеет смысл внимательно изучить демоверсию предстоящего экзамена, доступные пробные или тренировочные варианты, а также другие материалы, дающие более полное представление о будущих задачах.

• В-третьих, желательно иметь некоторый *запас прочности*, т. е. знать и уметь несколько больше того минимума, который вытекает из опыта предыдущих экзаменов. Ведь не секрет, что варианты экзаменационных заданий постепенно развиваются и усложняются: то, что раньше казалось новым и трудным для восприятия, со временем становится привычным и элементарным. В общем, нельзя ориентироваться только на вчерашний день. А учитывая, что ожидаемые в 2011 году (как и в 2010 г.) задачи типа С будут в значительной мере опираться на опыт вступительных экзаменов, хорошо бы приобрести и проработать современные пособия для поступающих в вузы, содержащие грамотные подборки задач и возможных методов их решения.

Диагностическая работа

1. Решите неравенство $\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-3x+3} \leqslant 0$.

2. Решите неравенство $\dfrac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geqslant \dfrac{x}{4}$.

3. Решите неравенство $0{,}1^{x^2+4x} < 10\,000$.

4. Решите неравенство $\dfrac{x^4-16}{4\cdot 2^{8-x^2}-8^x} \leqslant 0$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x-5) \geqslant 2$.

6. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(7x^2-x^3)+\log_{(x+2)^{-1}}(x^2-3x) \geqslant \log_{\sqrt{x+2}}\sqrt{5-x}.$$

7. Решите уравнение $\sqrt{x-1}=3-x$.

8. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leqslant 0$.

9. Решите уравнение $|x-1|+2|x-3|=5-x$.

10. Решите неравенство $2||x-2|-3|<x+4$.

11. Решите неравенство $x(|x^2-1|-2|x-1|)<0$.

12. Найдите все корни уравнения

$$\sin 2x - 3 = 3\cos 2x$$

на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

13. Решите уравнение $\sqrt{6\sin x}+2\cos x=0$.

14. Решите неравенство $10^{x^{\lg x}}\cdot 10^{\sqrt{10}^{\lg^2 x}} < 1\,000\,000$.

15. Решите уравнение

$$3^{3-2x}-\log_2(2-3x) = 3^{2-3x}-\log_2(3-2x).$$

16. Решите неравенство

$$5^{2x^2-2x+1} \leqslant \sqrt{3\sin\left(\pi x-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+4\cos\left(\pi x-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}.$$

§ 1. Рациональные уравнения и неравенства

Всякое *уравнение* или *неравенство* относительно *неизвестной* x записывается в виде

$$f(x) \vee g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые выражения[1], зависящие от переменной x, а $\vee$ — здесь и всюду ниже один из знаков $=$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\neq$.

К простейшим рациональным уравнениям и неравенствам можно отнести, во-первых, ***линейное***

$$ax + b \vee 0,$$

решаемое стандартными преобразованиями, и, во-вторых, ***квадратное***

$$ax^2 + bx + c \vee 0 \quad (a \neq 0),$$

левая часть которого представляет собой *квадратный трёхчлен* $f(x)$.

Пара корней квадратного уравнения задаётся формулой

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Обычно в этой формуле корни обозначаются $x_{1,2}$, но тогда не ясно, какой из них соответствует знаку «плюс», а какой — знаку «минус». Этим числам разрешается и совпадать: в этом случае квадратное уравнение формально имеет только один корень[2].

Для решения же квадратного неравенства бывает полезно:

• разложить его левую часть на *линейные множители*, т. е. привести её к виду

$$f(x) = a(x - x_+)(x - x_-);$$

• применить следующее основное утверждение о знаке квадратного трёхчлена: *пусть*

$$a > 0,$$

тогда неравенство

$$f(x) < 0$$

выполнено между корнями, а неравенство

$$f(x) > 0$$

выполнено за корнями.

---

[1] Функции.

[2] А квадратный трёхчлен — по-прежнему два.

Здесь предполагается, что подкоренное выражение, фигурирующее в формуле корней квадратного трёхчлена и называемое его *дискриминантом*, принимает неотрицательное значение. В противном случае — корней нет, разложение на линейные множители не возможно, а квадратный трёхчлен во всех точках имеет один и тот же знак.

Пример 1.1. Решите неравенство

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2-3x+3} \leqslant 0.$$

Решение[1].

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2-3x+3} \leqslant 0,$$

$$(x-2{,}5)(x+1) \leqslant 0, \quad \text{так как } x^2-3x+3>0 \quad (D<0).$$

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 2{,}5$.

Основным способом решения неравенства

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x) \vee 0,$$

левая часть которого представляет собой произведение, а правая — равна нулю, считается *перебор* всех таких случаев знаков сомножителей $f_i(x)$, при которых произведение имеет требуемый в неравенстве знак.

Метод интервалов применяется для решения ***рациональных*** неравенств, приведённых к *стандартному* виду

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_n)^{k_n} \vee 0,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые числа[2]. Он позволяет организованно исследовать знак произведения, стоящего в левой части неравенства, опираясь на следующее рассуждение:

• точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разбивают числовую ось на промежутки[3], на каждом из которых произведение имеет *фиксированный знак*;

• на самом *правом* из получившихся промежутков произведение заведомо *положительно*, так как на нём положителен каждый из его сомножителей;

---

[1] В тексте приводимых нами решений всюду между двумя последовательными уравнениями, неравенствами, системами или совокупностями подразумевается знак равносильности.

[2] Возможно, и отрицательные — тогда соответствующие множители с самого начала стоят в знаменателе.

[3] *Интервалы*, отсюда и название метода.

• далее, если двигаться по числовой оси справа налево, то при переходе через очередной корень x_i *меняет знак* множитель $x - x_i$ и только он, поэтому знак произведения либо меняется — когда соответствующая степень k_i нечётна, либо не меняется — когда она чётна;

• наконец, для завершения исследования достаточно выяснить, в каких точках x_i произведение *равно нулю*, а в каких — *не имеет смысла*, что определяется знаком степени k_i.

Пример 1.2. Решите неравенство

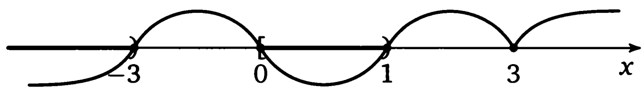
$$\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geqslant \frac{x}{4}.$$

Решение.

$$\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geqslant \frac{x}{4},$$

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2+2x-3} \leqslant 0,$$

$$\frac{x(x-3)^2}{(x+3)(x-1)} \leqslant 0.$$



Ответ: $x<-3$, $0 \leqslant x<1$, $x=3$.

При преобразованиях выражений и, в частности, при разложении их на множители иногда помогают *формулы сокращённого умножения*:

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ — *квадрат суммы*;

$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ — *квадрат разности*;

$(x+y)(x-y) = x^2-y^2$ — *разность квадратов*;

$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ — *куб суммы*;

$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ — *куб разности*;

$(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$ — *сумма кубов*;

$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$ — *разность кубов*.

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $x^2-2010x+2009=0.$

2. $x^2+2010x-2011=0.$

3. $x^2+2011x+2010=0.$

4. $x^2-2010x+2009<0.$

5. $x^2+2010x-2011\leqslant 0.$

6. $x^2+2011x+2010\geqslant 0.$

7. $(x+1)^4-3(x+1)^2-4=0.$

8. $(x+1)^4-3(x+1)^2-4<0.$

9. $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=0.$

10. $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}\leqslant 0.$

11. $\dfrac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14}=\dfrac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}.$

12. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680.$

13. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)<1680.$

14. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right).$

15. $\dfrac{(2-x^2)(x-3)^2}{(x+1)(x^2-3x-4)}\geqslant 0.$

16. $\dfrac{(x+2)(x^2-2x+1)}{4+3x-x^2}\geqslant 0.$

17. $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30}>0.$

18. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-4x-5}<0.$

19. $\dfrac{x^2-6x+9}{5-4x-x^2}\geqslant 0.$

20. $\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-4x+4}\geqslant 0.$

21. $\dfrac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3}<4.$

22. $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}<-2.$

23. $\dfrac{3x-5}{x^2+4x-5}>\dfrac{1}{2}.$

24. $\dfrac{5-2x}{3x^2-2x-16}<1.$

25. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}\geqslant\dfrac{1}{2}.$

26. $\dfrac{19-33x}{7x^2-11x+4}>2.$

27. $\dfrac{4}{1+x}+\dfrac{2}{1-x}<1.$

28. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x-1}>\dfrac{1}{x}.$

29. $\dfrac{7}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{9}{x-3}+1<0.$

30. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1.$

31. $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5.$

32. $(x^2-2x)(2x-2)-9\dfrac{2x-2}{x^2-2x}\leqslant 0.$

33. $\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x-2}\geqslant\dfrac{1}{x-3}.$

34. $\dfrac{7}{x^2-5x+6}+\dfrac{9}{x-3}+1\leqslant 0.$

35. $\dfrac{1}{x^2+8x-9}\geqslant\dfrac{1}{3x^2-5x+2}.$

36. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}}\geqslant 0.$

37. $\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{15}{88-32x}\right)^2\geqslant 1.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $3x^2-7x+4=0.$
2. $3x^2-7x+4\leqslant 0.$
3. $3x^2-7x+6=0.$
4. $3x^2-7x+6>0.$
5. $3x^2-7x-6=0.$
6. $3x^2-7x-6>0.$
7. $3x^4-7x^2+4=0.$
8. $3x^4-7x^2+4<0.$
9. $3x^4-7x^2-6=0.$
10. $3x^4-7x^2-6\leqslant 0.$
11. $3x^6-7x^3-6=0.$
12. $3x^6-7x^3-6>0.$
13. $(x-1)(3-x)(x-2)^2>0.$
14. $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{-x-1}<0.$

15. $\dfrac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1} > 0.$

16. $\dfrac{5x-4}{3x+1} < 0.$

17. $\dfrac{2x-3}{3x-5} > 0.$

18. $\dfrac{0,7}{x-1-x^2} < 0.$

19. $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+x+1} \geqslant 0.$

20. $\dfrac{3}{x-2} < 1.$

21. $\dfrac{1}{x-1} \leqslant 2.$

22. $\dfrac{x-1}{x+3} > 2.$

23. $\dfrac{5x-1}{x^2+3} < 1.$

24. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} < 1.$

25. $\dfrac{3x^2+1}{x^2-5x+6} \geqslant 0.$

26. $\dfrac{2x^2-21x+40}{x^2+3} \geqslant 0.$

27. $\dfrac{2x^2-3x-459}{x^2+1} > 1.$

28. $\dfrac{x}{x^2-3x-4} > 0.$

29. $\dfrac{x+7}{x-5} + \dfrac{3x+1}{2} \geqslant 0.$

30. $\dfrac{x-1}{x+1} < x.$

31. $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{3}{x-3}.$

32. $2+\dfrac{3}{x+1} > \dfrac{2}{x}.$

33. $1+\dfrac{12}{x^2} < \dfrac{7}{x}.$

34. $x-17 \geqslant \dfrac{60}{x}.$

35. $\dfrac{6}{x-5} \geqslant x.$

36. $x-1 > \dfrac{4x}{3-x}.$

37. $\dfrac{3}{2-x^2} \leqslant 1.$

38. $\dfrac{1}{x+2} \geqslant \dfrac{1}{x-2}.$

39. $\dfrac{x^2+1}{x} < \dfrac{1}{x}+1.$

40. $\dfrac{9}{(x+1)^2} \geqslant 1.$

§ 2. Показательные уравнения и неравенства

Стандартный способ решения *простейших* ***показательных*** уравнений и неравенств основывается на монотонности показательной функции, из которой получается следующее основное ***правило отбрасывания оснований***[1]: *пусть*

$$a > 1,$$

тогда уравнение или неравенство

$$a^f \vee a^g$$

равносильно уравнению или неравенству

$$f \vee g.$$

В этом правиле последнее уравнение или неравенство имеет тот же знак $\vee$, что и первое, так как показательная функция с основанием $a > 1$ возрастает.

Если же основание a удовлетворяет неравенствам $0 < a < 1$, то в сформулированный переход необходимо внести поправку, поменяв в конце знак $\vee$ на *обратный* $\wedge$, а именно: знак $>$ — на $<$, знак $\geqslant$ — на $\leqslant$ и т. д., но знак $=$ (как и знак $\neq$) при этом не меняется вовсе. Всё дело в том, что показательная функция с основанием, меньшим единицы, уже не возрастает, а убывает.

Когда основание степени не является константой, может случиться, что при одних значениях неизвестной[2] оно больше единицы, а при других — меньше. И если это так, то каждый из перечисленных случаев разбирается отдельно[3].

В уравнении или неравенстве

$$a^f \vee b \quad (a, b > 0,\ a \neq 1),$$

левая часть которого уже имеет нужный вид, а правая — нет, положение можно поправить с помощью тождества[4]

$$b = a^{\log_a b}.$$

Оно же позволяет в случае переменного основания перейти к новому, заранее выбранному, постоянному основанию.

[1] То есть логарифмирование уравнения или неравенства.

[2] Или параметра.

[3] А при необходимости разбираются также и случаи, когда основание равно нулю или даже отрицательно.

[4] Представляющего собой, по существу, определение *логарифма*.

Пример 2.1. Решите неравенство

$$0{,}1^{x^2+4x} < 10\,000.$$

Р е ш е н и е.

$$0{,}1^{x^2+4x} < 10\,000 \quad (= 0{,}1^{-4});$$

$$x^2 + 4x > -4;$$

$$(x+2)^2 > 0;$$

$$x \neq -2.$$

Ответ: $x < -2$, $x > -2$.

Для приведения исходного показательного уравнения или неравенства к нужному виду могут пригодиться следующие *формулы действий со степенями* (здесь и ниже считаем $a, b > 0$):

$$\boxed{\begin{aligned}
&a^0 = 1, \quad 1^x = 1;\\
&a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \quad (k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N});\\
&a^{-x} = \frac{1}{a^x};\\
&a^x \cdot a^y = a^{x+y};\\
&\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\\
&(a^x)^y = a^{xy};\\
&a^x \cdot b^x = (ab)^x;\\
&\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.
\end{aligned}}$$

К неравенствам вида

$$(a^f - a^g) \cdot h \vee 0$$

применим ***метод замены множителя***, позволяющий сильно упростить выражение в скобках и состоящий в следующем: *пусть*

$$a > 1,$$

тогда множитель

$$a^f - a^g$$

можно заменить множителем

$$f - g$$

того же знака.

При указанной замене сохраняется каждое из трёх возможных событий: положительность множителя, его отрицательность и равенство его нулю. По сути, этот метод представляет собой перефразировку сформулированного выше правила отбрасывания оснований, а в случае $0<a<1$ тот же множитель $a^f - a^g$ можно заменить противоположным множителем $g-f$.

Пример 2.2. Решите неравенство

$$\frac{x^4-16}{4\cdot 2^{8-x^2}-8^x} \leqslant 0.$$

Решение.

$$\frac{x^4-16}{4\cdot 2^{8-x^2}-8^x} \leqslant 0,$$

$$\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{2^{10-x^2}-2^{3x}} \leqslant 0,$$

$$\frac{x^2-4}{(10-x^2)-3x} \leqslant 0 \quad \text{(так как } 2^f-2^g \text{ и } f-g \text{ — одного знака)},$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)} \geqslant 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x+5} \geqslant 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Ответ: $x<-5$, $-2 \leqslant x<2$, $x>2$.

Заметим, что полученное выше неравенство

$$\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{2^{10-x^2}-2^{3x}} \leqslant 0$$

можно было решить и без замены множителя, рассмотрев два случая:

$$1)\ \begin{cases} x^2 \geqslant 4, \\ 2^{10-x^2} < 2^{3x}; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)(x+2) \geqslant 0, \\ (x-2)(x+5) > 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-5; \end{array}\right.$$

$$2)\ \begin{cases} x^2 \leqslant 4, \\ 2^{10-x^2} > 2^{3x}; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)(x+2) \leqslant 0, \\ (x-2)(x+5) < 0; \end{cases} \quad -2 \leqslant x < 2.$$

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\dfrac{2^{2x-1}\cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}}=\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-1}$.

2. $25(0{,}2)^{x+0{,}5}=\sqrt{5}(0{,}04)^x$.

3. $4^{\frac{2}{x}}-5\cdot 4^{\frac{1}{x}}+4=0$.

4. $64\cdot 9^x-84\cdot 12^x+27\cdot 16^x=0$.

5. $4^{-\frac{-1}{x}}+6^{-\frac{-1}{x}}=9^{-\frac{-1}{x}}$.

6. $3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{\frac{2x}{3}}=675$.

7. $5^{2x}-7^x-35\cdot 5^{2x}+35\cdot 7^x=0$.

8. $8^x-3\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

9. $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

10. $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$.

11. $(\sqrt{5+\sqrt{24}})^x+(\sqrt{5-\sqrt{24}})^x=10$.

12. $3^{12x-1}-9^{6x-1}-27^{4x-1}+81^{3x+1}=2192$.

13. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\sqrt{x}}=2{,}25^{\sqrt{x}-4}$.

14. $2^{x^2-6}\cdot 3^{x^2-6}=\dfrac{(6^{x-1})^4}{6^5}$.

15. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{\lg 4}{\lg 8}$.

16. $5^x\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500$.

17. $0{,}3^{2x^2-3x+6}<0{,}00243$.

18. $0{,}1^{4x^2-2x-2}<0{,}1^{2x-3}$.

19. $4^{-x+0{,}5}-7\cdot 2^{-x}-4<0$.

20. $4^{x+1}-16^x<2\cdot\log_4 8$.

21. $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1}<2$.

22. $\dfrac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\leqslant 0$.

23. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

24. $4^x-2\cdot 5^{2x}-10^x>0$.

25. $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{-\frac{1}{x}}<4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$.

26. $8\cdot\dfrac{3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

27. $\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geqslant 5.$

28. $2^{3x-0,5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}>1+2^{-3x}.$

29. $4^{3x^2+x}-8<2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$

30. $5^{2x-\frac{x^2}{3}}<5^{2-2x}(\sqrt[3]{5})^{x^2}+24.$

31. $5^{x+2}-5^{x+1}-5^x>7^{\frac{x}{2}+3}+7^{\frac{x}{2}+2}+7^{\frac{x}{2}+1}.$

32. $5^{2x+1}+6^{x+1}>30+5^x\cdot 30^x.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $5^{x^2-6x+8}=1.$

2. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3x-7}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{7x-3}.$

3. $0,125\cdot 2^{4x-16}=\left(\dfrac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}.$

4. $5^{x+1}=5^{x-1}+24.$

5. $7^{x+1}+7^x=3^{x+2}+3^{x+1}+3^x.$

6. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250.$

7. $9^x+6^x=2\cdot 4^x.$

8. $2^{2+x}+2^{2-x}=17.$

9. $2^{x+1}\cdot 5^x=200.$

10. $2^x\cdot 5^{x-1}=10^x\cdot 5^{x+1}.$

11. $2^{3-2x}=4^{3x+1-x^2}.$

12. $3^{2x}-5^x-9^x\cdot 15+5^x\cdot 15=0.$

13. $7^{x+2}-\dfrac{1}{7}7^{x+1}-14\cdot 7^{x-1}+2\cdot 7^x=48.$

14. $4\cdot 2^{2x}-6^x=18\cdot 3^{2x}.$

15. $4^x=2\cdot 14^x+3\cdot 49^x.$

16. $2^{5-10x}>1.$

17. $16^x>0,125.$

18. $0,5^x>\dfrac{1}{128}.$

19. $3^{x+1}<\dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}.$

20. $0{,}2^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$.

21. $0{,}1^{\frac{2x+1}{1-x}} > 10^3$.

22. $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leqslant 9$.

23. $2^x + 2^{1-x} - 3 < 0$.

24. $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

25. $25^{-x} - 5^{-x+1} \geqslant 50$.

26. $3^{x-3} < \dfrac{3}{27^{\frac{1}{x}}}$.

27. $4^{\frac{2x-2}{x}} < \sqrt[3]{8^{3x-9}}$.

§ 3. Логарифмические уравнения и неравенства

Стандартный метод решения *простейших **логарифмических*** уравнений и неравенств, изучаемых в школе, опирается на монотонность логарифмической функции, т. е. на следующее основное ***правило отбрасывания логарифмов***[1]: *пусть* $a > 1$, *тогда уравнение или неравенство*

$$\log_a f \vee \log_a g$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f \vee g \\ f, g > 0. \end{cases}$$

Отличие этого правила от аналогичного правила отбрасывания оснований объясняется тем, что при отбрасывании логарифмов расширяется *область допустимых значений*[2] (*ОДЗ*) уравнения или неравенства. Действительно, выражения f и g, стоявшие прежде под логарифмами, после отбрасывания последних могут стать отрицательными или равными нулю, каковые возможности следует сознательно отмести.

Для этого в систему с полученным уравнением или неравенством можно добавить оба пропавших ограничения на f и g. При этом, как правило, одно из них[3] оказывается логически лишним, что позволяет значительно упростить получающуюся систему, сэкономив на нахождении ОДЗ.

В случае $0 < a < 1$, неравенстве $f \vee g$ итоговой системы необходимо заменить неравенством $f \wedge g$, так как логарифмическая функция с таким основанием a убывает.

Если же основание логарифма не есть константа, то отдельно разбираются случаи, когда оно больше единицы и когда — меньше[4].

Для того чтобы отбросить логарифмы в уравнении или неравенстве

$$\log_a f \vee g,$$

[1] То есть потенцирование уравнения или неравенства.

[2] Или область определения.

[3] А иногда и оба.

[4] Случаи, когда основание равно единице, нулю или вообще отрицательно, — невозможны *по определению* логарифма.

его правую часть можно представить в нужном виде с помощью тождества[1]

$$g = \log_a(a^g).$$

Пример 3.1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 5) \geqslant 2.$$

Решение.

$$\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 5) \geqslant 2 \ \ (= \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^2 = \log_{\sqrt{3}} 3),$$
$$x^2 - 2x - 5 \geqslant 3,$$
$$(x-4)(x+2) \geqslant 0.$$

Ответ: $x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$.

Для приведения исходного логарифмического уравнения или неравенства к нужному виду могут пригодиться следующие *формулы действий с логарифмами* (здесь и ниже $a, b, x, y > 0$ и $a, b \neq 1$):

$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1;$

$a^{\log_a x} = x$ — *основное логарифмическое тождество*;

$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ — *логарифм произведения*;

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ — *логарифм частного*;

$p \log_a x = \log_a(x^p)$ — *логарифм степени*;

$\frac{p}{q} \log_a x = \log_{(a^q)}(x^p) \quad (q \neq 0);$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — *формула перехода к новому основанию*;

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

В случае переменного основания логарифма можно избавиться от явного перебора случаев, перейдя[2] к новому, постоянному основанию.

Некоторые формулы из приведённого списка обладают тем свойством, что при их использовании слева направо ОДЗ уравнения или неравенства *расширяется*[3], а в другую сторону — *сужается*. И если

[1] Представляющего собой, по большому счёту, ещё одну разновидность определения логарифма.

[2] По соответствующей формуле.

[3] Так же как и при отбрасывании логарифмов.

первую ситуацию легко исправить добавлением пропавших ограничений в систему или проверкой их выполнения для найденных решений, то вторая ситуация совершенно недопустима, так как может привести к потере решений.

К неравенствам вида

$$(\log_a f - \log_a g) \cdot h \vee 0$$

также применим ***метод замены множителя***: *пусть*

$$a > 1,$$

тогда множитель

$$\log_a f - \log_a g$$

можно заменить множителем

$$f - g$$

того же знака при дополнительных условиях

$$f, g > 0.$$

Важный частный случай этой замены получается при подстановке в ней $g = 1$: *пусть*

$$a > 1,$$

тогда множитель

$$\log_a f$$

можно заменить множителем

$$f - 1 \quad \text{при } f > 0.$$

Опять же, в случае $0 < a < 1$ множитель $\log_a f - \log_a g$ можно заменить противоположным множителем $g - f$ при $f, g > 0$, а множитель $\log_a f$ — противоположным множителем $1 - f$ при $f > 0$.

Пример 3.2. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(7x^2 - x^3) + \log_{(x+2)^{-1}}(x^2 - 3x) \geqslant \log_{\sqrt{x+2}} \sqrt{5-x}.$$

Решение.

$$\log_{x+2}(7x^2 - x^3) + \log_{(x+2)^{-1}}(x^2 - 3x) \geqslant \log_{\sqrt{x+2}} \sqrt{5-x};$$

$$\log_{x+2}(7x^2 - x^3) - \log_{x+2}(x^2 - 3x) \geqslant \log_{x+2}(5 - x);$$

$$\frac{\lg(7x^2 - x^3)}{\lg(x+2)} - \frac{\lg(x^2 - 3x) + \lg(5 - x)}{\lg(x+2)} \geqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lg(7x^2-x^3)-\lg(x^2-3x)(5-x)}{\lg(x+2)-\lg 1} \geqslant 0, \\ 5-x>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(7x^2-x^3)-(x^2-3x)(5-x)}{(x+2)-1} \geqslant 0, \\ x<5, \\ 7x^2-x^3>0, \\ x^2-3x>0, \\ x+2>0 \end{cases}$$

(так как $\lg f - \lg g$ и $f-g$ — одного знака при $f, g > 0$);

$$\begin{cases} \dfrac{x(x-15)}{x+1} \leqslant 0, \\ x<5, \\ x^2(x-7)<0, \\ x(x-3)>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<5, \\ \dfrac{x}{x+1} \geqslant 0, \\ x(x-3)>0. \end{cases}$$

Ответ: $-2<x<-1$, $3<x<5$.

Данное неравенство можно было решить, не делая замены множителя, следующим образом:

$$\begin{cases} \log_{x+2}(7x^2-x^3) \geqslant \log_{x+2}(x^2-3x)(5-x), \\ 5-x \geqslant 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1)\ \begin{cases} x+2>1, \\ 7x^2-x^3 \geqslant (x^2-3x)(5-x), \\ x^2-3x>0, \\ 5-x>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-15) \leqslant 0, \\ -1<x<5, \\ x(x-3)>0; \end{cases} \quad 3<x<5;$$

$$2)\ \begin{cases} 0<x+2<1, \\ 7x^2-x^3 \leqslant (x^2-3x)(5-x), \\ 7x^2-x^3>0, \\ 5-x>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-15) \geqslant 0, \\ -2<x<-1, \\ x^2(x-7)>0; \end{cases} \quad -2<x<-1.$$

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\log_{(x-1)} 2 = 3$.

2. $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x))) = \frac{1}{2}$.

3. $(\log_2 x)^{-1} + 4\log_2 x^2 + 9 = 0$.

4. $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4\log_4 x^2 + 9 = 0$.

5. $\dfrac{\log_8 \frac{8}{x^2}}{(\log_8 x)^2} = 3$.

6. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 = 4$.

7. $3^{\log_3(\lg\sqrt{x})} - \lg x + \lg x^2 - 3 = 0$.

8. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$.

9. $\log_{\frac{1}{3}} x - 3\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0$.

10. $3 + 2\log_{x+1} 3 = 2\log_3(x+1)$.

11. $\log_x(9x^2) \cdot (\log_3 x)^2 = 4$.

12. $2\log_8(2x) + \log_8(x^2+1-2x) = \frac{4}{3}$.

13. $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$.

14. $2\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}}(13-x) = \log_2(10-x)^2 + 2\log_4(8-x)$.

15. $2\log_2(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2\sqrt{2}x) = 1$.

16. $\log_3((x+1)(x-3)) = 4\log_9(2x+1) - \log_{\sqrt{5}} 5$.

17. $\log_{0,5}(x^2-5x+6) > -1$.

18. $\log_8(x^2-4x+3) \leqslant 1$.

19. $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2-3x}{x} \geqslant -1$.

20. $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.

21. $2\log_2(x-1) - \log_2(2x-4) > 1$.

22. $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$.

23. $2\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}}(4-x) \leqslant \log_3(x-1)^2 + 2\log_9(10-x)$.

24. $\log_x\left(\dfrac{4x+5}{6-5x}\right) < -1$.

25. $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)>1.$

26. $\log_{x^2}(x+2)<1.$

27. $\log_{\frac{x}{2}}8+\log_{\frac{x}{4}}8<\frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}.$

28. $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\cdot\log_2(x+1)>\log_{(x+2)}(x+1).$

29. $\log_5 x+\log_x\frac{x}{3}<\frac{2-\log_3 x}{\log_3 x}\log_5 x.$

30. $\log_{\frac{1}{2}}(\log_8\frac{x^2-2x}{x-3})<0.$

31. $(\log_x 2)(\log_{2x}2)(\log_2 4x)>1.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1.$

2. $\lg 5+\lg(x+10)=1+\lg(21x-20)-\lg(2x-1).$

3. $\lg x-\frac{1}{2}\lg\left(x-\frac{1}{2}\right)=\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x+\frac{1}{8}\right).$

4. $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5.$

5. $x^{1+\lg x}=10x.$

6. $(\lg x)^2-3\lg x=\lg x^2-4.$

7. $(\log_2 x)^2+2\log_2\sqrt{x}=2.$

8. $\log_5\left(\frac{x+2}{10}\right)=\log_5\left(\frac{2}{x+1}\right).$

9. $2\log_4(4-x)=4-\log_2(-x-2).$

10. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1.$

11. $\log_{x+1}(x^2-3x+1)=1.$

12. $\log_2 x-8\log_{x^2}2=3.$

13. $1+2\log_{(x+2)}5=\log_5(x+2).$

14. $\log_4 2^{4x}=2^{\log_{\sqrt{2}}2}.$

15. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{15}{\log_2\left(\frac{x}{8}\right)-1}.$

16. $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)>0.$

17. $\log_5(3x-1)<1.$

18. $\lg(x^2-5x+7)<0$.

19. $\log_7\left(\frac{1-2x}{x}\right)\leqslant 0$.

20. $\log^2_{0,5}x+\log_{0,5}x\leqslant 2$.

21. $\log_2 x\leqslant\frac{2}{\log_2 x-1}$.

22. $\frac{1}{1+\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}>2$.

23. $\log_{\frac{1}{3}}(3x-4)>\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$.

24. $\log_{0,5}(4-x)\geqslant\log_{0,5}2-\log_{0,5}(x-1)$.

25. $\log_{0,1}(x^2+x-2)>\log_{0,1}(x+3)$.

26. $1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2)$.

27. $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_4(x^2-5)\right]>0$.

28. $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+18)+2\log_5(x-4)<0$.

29. $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_x 3-\frac{5}{2}$.

30. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$.

§ 4. Иррациональные уравнения и неравенства

Для избавления от радикалов в ***иррациональных*** уравнениях или неравенствах требуется, прежде всего, умение возводить обе их части в квадрат. Делается это с помощью следующего основного ***правила возведения в квадрат***, базирующегося на возрастании простейшей квадратичной функции на положительной полуоси: *пусть*

$$f, g \geqslant 0,$$

тогда уравнение или неравенство

$$f \vee g$$

равносильно уравнению или неравенству

$$f^2 \vee g^2.$$

Это правило не распространяется на те случаи, в которых хотя бы одна из частей уравнения или неравенства отрицательна, — их нужно рассматривать отдельно[1].

Неосторожное возведение в квадрат уравнения может повлечь за собой, к счастью, только приобретение посторонних корней, которые выявляются впоследствии с помощью проверки. Что же касается возведения в квадрат неравенств, то тут ситуация гораздо серьёзнее: несоблюдение основного правила может привести как к приобретению, так и к потере решений — а это уже непоправимо.

Пример 4.1. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1} = 3-x.$$

Решение.

$$\sqrt{x-1} = 3-x;$$

$$\begin{cases} 3-x \geqslant 0, \\ x-1 = (3-x)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x^2-7x+10 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 3, \\ (x-2)(x-5) = 0; \end{cases}$$

$$x = 2.$$

Ответ: $x=2$.

[1] Некоторые (очевидно не реализуемые в данных условиях) — только в уме.

Преобразования иррациональных уравнений или неравенств производятся по следующим *формулам действий с арифметическими корнями* (здесь $x, y \geqslant 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}$):

$\sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[n]{0} = 0;$

$(\sqrt[n]{x})^n = x;$

$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ — *корень из произведения;*

$\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y \neq 0)$ — *корень из дроби;*

$\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k$ — *корень из степени;*

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$ — *корень из корня;*

$\sqrt[nm]{x^{km}} = \sqrt[n]{x^k}$ — *правило сокращения.*

Корни чётной степени извлекаются только из неотрицательных чисел[1]. Поэтому, действуя по приведённым формулам, например, с квадратными корнями, нужно аккуратно отслеживать возможное расширение ОДЗ уравнения или неравенства и, главное, не допускать её сужения.

Сказанное непосредственно относится к возведению квадратного корня $\sqrt{f}$ в квадрат, после чего подкоренное выражение f стоит уже не под корнем, а значит, лишено неявного ограничения $f \geqslant 0$. Правда, довольно часто это ограничение сохраняется в силу других причин (например, в силу равенства бывшего подкоренного выражения f квадрату какого-либо другого выражения).

К неравенствам вида

$$(\sqrt{f} - \sqrt{g}) \cdot h \vee 0$$

также применим ***метод замены множителя***, вытекающий из основного правила возведения в квадрат и состоящий в следующем: *множитель*

$$\sqrt{f} - \sqrt{g}$$

можно заменить множителем

$$f - g$$

того же знака при дополнительных условиях

$$f, g \geqslant 0.$$

[1] А корни нечётной степени доопределяются на любые действительные числа

Важный частный случай этой замены получается в результате подстановки в ней $g=0$: *множитель* $\sqrt{f}$ *можно заменить множителем*

$$f \quad \text{при } f \geqslant 0.$$

Пример 4.2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leqslant 0.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leqslant 0;$$

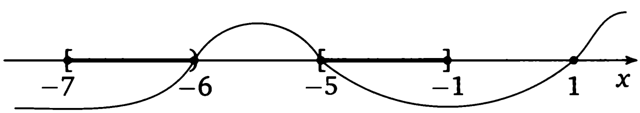
$$\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4(1-x)}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{1}} \leqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-1)-4(1-x)}{(x+7)-1} \leqslant 0, \\ x^2-1 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0, \\ x+7 \geqslant 0; \end{cases}$$

(так как $\sqrt{f}-\sqrt{g}$ и $f-g$ — одного знака при $f, g \geqslant 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+4x-5}{x+6} \leqslant 0, \\ x^2 \geqslant 1, \\ -7 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+5)(x-1)}{x+6} \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} -7 \leqslant x \leqslant -1 \\ x = 1. \end{array} \right. \end{cases}$$



Ответ: $-7 \leqslant x < -6$, $-5 \leqslant x \leqslant -1$, $x=1$.

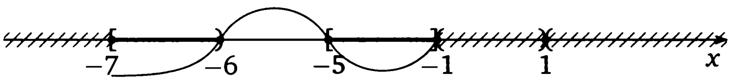
Исходное неравенство можно решить методом интервалов, применив его к иррациональной функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}.$$

1. ООФ: $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 1-x\geqslant 0, \\ 1\neq x+7\geqslant 0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ -6<x\leqslant -1, \\ -7\leqslant x<-6. \end{array}\right.$

2. $\sqrt{x^2-1}=2\sqrt{1-x}$; $x^2-1=4(1-x)\geqslant 0$; $\begin{cases} (x-1)(x+5)=0, \\ x\leqslant 1; \end{cases}$ $x=1,-5$.

3. Определим знаки:



Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\sqrt{2x^2-21x+4}=2-11x$.

2. $\sqrt{3x^2-25x+51}=7-2x$.

3. $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$.

4. $\sqrt{4-x}-\sqrt{5+x}=3$.

5. $\sqrt{14-x}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}$.

6. $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$.

7. $\sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{(x+1)^3}=0$.

8. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$.

9. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+34}-\sqrt{x+7}$.

10. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

11. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$.

12. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

13. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$.

14. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

15. $(5x+2)\sqrt{1-x}+(5x-7)\sqrt{x}=0$.

16. $\sqrt{1-x}\leqslant\sqrt[4]{x+5}$.

17. $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}>\sqrt{5x-27}$.

18. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

19. $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$.

20. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<\dfrac{3}{2}$.

21. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geqslant 2$.

22. $\sqrt{2-\sqrt{x+3}}<\sqrt{x+4}$.

23. $x-4<\dfrac{x^2}{(1+\sqrt{x+1})^2}$.

24. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2$.

25. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$.

26. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$.

27. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$.

28. $x^2\geqslant x(2+\sqrt{12-2x-x^2})$.

29. $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$.

30. $\sqrt{x+5}-\sqrt{-x-3}<1+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$.

31. $11\sqrt{2x-\sqrt{48x-144}}>2x-12$.

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0$.

2. $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$.

3. $\sqrt{8-3x^2}=1$.

4. $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2}$.

5. $x-\sqrt{x+1}=1$.

6. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$.

7. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.

8. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$.

9. $\sqrt{7-x}=x-1$.

10. $\sqrt{12+x}+x=0$.

11. $\sqrt{6-4x+x^2}=x+4$.

12. $\dfrac{\sqrt{2x+1}+1}{x}=1$.

13. $2x^2+3x-\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$.

14. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.

15. $\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}-\sqrt{x+1}$.

16. $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}>-1$.

17. $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$.

18. $\sqrt{x^2+2x-3} < 1$.

19. $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}} < \sqrt{2-x}+2$.

20. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$.

21. $\sqrt{x^2} < x+1$.

22. $\sqrt{2x-1} < x-2$.

23. $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

24. $3-x > 3\sqrt{1-x^2}$.

25. $x < \sqrt{x+2}$.

26. $x < \sqrt{2-x}$.

27. $x+3 < \sqrt{x+33}$.

28. $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2$.

29. $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$.

30. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

§ 5. Уравнения и неравенства с модулем

Стандартное ***правило раскрытия модуля*** основывается на его *определении*:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Раскрывая сразу несколько модулей, приходится разбирать случаи, которые задаются знаками выражений, стоящих под модулем. Однако, если количество модулей велико, то велико и число разбираемых случаев.

Его можно заметно сократить за счёт применения *метода интервалов*: так, все корни выражений $f_i(x)$, от каждого из которых в уравнении или неравенстве взят модуль, разбивают числовую прямую на промежутки[1] — и на любом из них каждый модуль $|f_i(x)|$ раскрывается уже вполне однозначно.

Пример 5.1. Решите уравнение

$$|x-1|+2|x-3| = 5-x.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим случаи:

$$1)\ \begin{cases} x \geqslant 3, \\ (x-1)+2(x-3) = 5-x, \end{cases} \qquad x = 3;$$

$$2)\ \begin{cases} 1 \leqslant x < 3, \\ (x-1)+2(3-x) = 5-x, \end{cases} \qquad 1 \leqslant x < 3;$$

$$3)\ \begin{cases} x < 1, \\ (1-x)+2(3-x) = 5-x, \end{cases} \qquad x \in \varnothing.$$

Ответ: $1 \leqslant x \leqslant 3$.

Другой подход, напоминающий скорее не раскрытие, а *отбрасывание* модулей, применим к *простейшим* уравнениям и неравенствам вида

$$|f| = |g| \quad \text{или} \quad |f| \vee g.$$

Он использует *геометрический смысл* модуля, состоящий в том, что модуль $|x|$ численно равен расстоянию на числовой прямой от точки x до точки 0.

[1] Число которых сравнимо с числом модулей.

Исходя из этого смысла, можно установить справедливость, например, таких утверждений:

- *уравнение* $|f| = |g|$ *равносильно совокупности*

$$f = \pm g;$$

- *уравнение* $|f| = g$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} f = \pm g, \\ g \geqslant 0; \end{cases}$$

- *неравенство* $|f| < g$ *равносильно двойному неравенству*

$$-g < f < g;$$

- *неравенство* $|f| > g$ *равносильно совокупности*

$$\left[\begin{array}{l} f > g \\ f < -g. \end{array}\right.$$

Пример 5.2. Решите неравенство

$$2||x-2|-3| < x+4.$$

Р е ш е н и е.

$$2||x-2|-3| < x+4;$$

$$-x-4 < 2(|x-2|-3) < x+4;$$

$$-x+2 < 2|x-2| < x+10;$$

$$\begin{cases} -x-10 < 2(x-2) < x+10; \\ \left[\begin{array}{l} 2(x-2) > -x+2, \\ 2(x-2) < x-2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 14; \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $-2 < x < 2$, $2 < x < 14$.

Задачу можно решить раскрытием модулей, рассмотрев два случая, в каждом из которых — еще по два случая.

$$1)\ \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 2|x-5| < x+4; \end{cases}$$

$$1а)\ \begin{cases} x \geqslant 5, \\ 2x-10 < x+4; \end{cases} \qquad 5 \leqslant x \leqslant 14;$$

$$1б)\ \begin{cases} 2 \leqslant x < 5, \\ -2x+10 < x+4; \end{cases} \qquad 2 < x < 5;$$

$$2)\ \begin{cases} x < 2, \\ 2|x+1| < x+4; \end{cases}$$

$$2а)\ \begin{cases} -1 \leqslant x < 2, \\ 2x+2 < x+4; \end{cases} \qquad -1 \leqslant x < 2;$$

$$2б)\ \begin{cases} x < -1, \\ -2x-2 < x+4; \end{cases} \qquad -2 < x < -1.$$

Объединив все четыре промежутка, получим ответ.

Полезную роль при преобразовании выражений могут сыграть следующие *свойства модулей*:

$|x|^2 = x^2$;

$|x| = \sqrt{x^2}$;

$|xy| = |x| \cdot |y|$ — *модуль произведения*;

$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$ — *модуль дроби*;

$|x| \geqslant x$;

$|x+y| \leqslant |x|+|y|$ — *неравенство треугольника*[1];

$|x-y| \geqslant ||x|-|y||$.

Наконец, первое из перечисленных здесь свойств порождает ещё один способ избавления от модулей — а именно, *возведение их в квадрат*.

Согласно указанному свойству и основному правилу возведения в квадрат уравнения или неравенства, к примеру, имеем: *неравенство*

$$|f| \vee |g|$$

[1] Или *модуль суммы*: здесь неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда слагаемые имеют одинаковый знак.

равносильно неравенству

$$f^2 \vee g^2$$

(при дальнейшей работе с полученным неравенством выполнять реальное возведение в квадрат вовсе не обязательно: наоборот, лучше применить формулу разности квадратов).

Из сказанного вытекает, что к неравенствам вида

$$(|f| - |g|) \cdot h \vee 0$$

также применим ***метод замены множителя***: *множитель*

$$|f| - |g|$$

можно заменить множителем

$$f^2 - g^2$$

того же знака.

Пример 5.3. Решите неравенство

$$x(|x^2 - 1| - 2|x - 1|) < 0.$$

Р е ш е н и е.

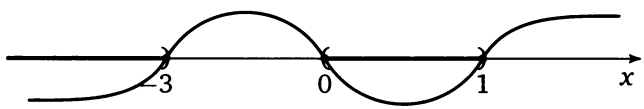
$x(|x^2-1|-2|x-1|) < 0;$

$x((x^2-1)^2-(2x-2)^2) < 0$ (так как $|f|-|g|$ и f^2-g^2 — одного знака);

$x((x^2-1)+(2x-2))((x^2-1)-(2x-2)) < 0;$

$x(x^2+2x-3)(x^2-2x+1) < 0;$

$x(x+3)(x-1)^3 < 0;$



Ответ: $x < -3$, $0 < x < 1$.

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $|2-5x^2|=3.$

2. $|x^2-13x+35|=|35-x^2|.$

3. $|2x+8|-|x-5|=12.$

4. $|5x-3|-|7x-4|=2x-1.$

5. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0.$

6. $2|x+6|-|x|+|x-6|=18.$

7. $||||x-1|+2|-1|+1|=2.$

8. $|2x-15|=22-|2x+7|.$

9. $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=1.$

10. $|x^2-2x-1|=\frac{5x+1}{3}.$

11. $|x-1|>\frac{x+1}{2}.$

12. $|2x-4|-|3x+9|>|x-1|-6.$

13. $||x+1|-|x-1||<1.$

14. $|x^2-2x-3|<3x-3.$

15. $x^2-|5x-3|-x<2.$

16. $x^2+4\geqslant|3x+2|-7x.$

17. $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0.$

18. $|x^2+x-2|+|x+4|\leqslant x^2+2x+6.$

19. $|x^2-2x-8|>2x.$

20. $x^2+x-10<2|x-2|.$

21. $2x>\frac{5x+3}{|x+2|}.$

22. $\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199}<1.$

23. $\frac{|x-2|}{|x-1|-1}\geqslant 1.$

24. $\frac{3}{|x+1|-1}\geqslant|x|.$

25. $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3.$

26. $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0.$

27. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 2.$

28. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x.$

29. $|x^3-1| \geqslant 1-x.$

30. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $|x-1|=x-1.$

2. $|x+2|=2(3-x).$

3. $|3x-2|+x=11.$

4. $|x|-|x-2|=2.$

5. $|1-x^2|=8.$

6. $|2x-3|=3-2x.$

7. $x^2+|x|-2=0.$

8. $(x-7)^2-|x-7|=30.$

9. $x^2-6x+8+|x-4|=0.$

10. $3|x+2|+x^2+6x+2=0.$

11. $|5-2x|<1.$

12. $\left|3x-\dfrac{5}{2}\right| \geqslant 2.$

13. $|x-2| \leqslant |x+4|.$

14. $2|x+1| \leqslant x+4.$

15. $|x+2|-|x-1|+\dfrac{3}{2}<x.$

16. $|x+1|-|x-4|>7.$

17. $x^2-5|x|+6<0.$

18. $x^2-|x|-2 \leqslant 0.$

19. $|x^2-5x|<6.$

20. $|x^2-2x| \leqslant x.$

21. $|x-4|>x^2-7x+12.$

22. $x^2-5x+9 \leqslant |x-6|.$

23. $3x^2-|x-3| \geqslant 9x-2.$

24. $|x-6|>|x^2-5x+9|.$

25. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{|x|} \geqslant 2.$

26. $\dfrac{3}{|x-1|} \geqslant 2x+5.$

27. $\dfrac{|x+3|-1}{4-2|x+4|} \geqslant -1.$

28. $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leqslant 2.$

29. $\dfrac{|1-x|+10}{4|x-1|+3}>2.$

30. $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geqslant \dfrac{2}{|x+1|-2}.$

§ 6. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решение практически любого тригонометрического уравнения или неравенства предполагает умение решать их *простейшие* варианты вида

$$\sin x \vee a,$$
$$\cos x \vee a,$$
$$\operatorname{tg} x \vee a,$$
$$\operatorname{ctg} x \vee a.$$

Простейшие ***тригонометрические уравнения*** решаются соответственно по формулам

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \sin x = a & \Leftrightarrow & x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \\ \cos x = a & \Leftrightarrow & x = \pm \arccos a + 2\pi n, \\ \operatorname{tg} x = a & \Leftrightarrow & x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \\ \operatorname{ctg} x = a & \Leftrightarrow & x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \end{array}}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, причём выражения $\arcsin a$ и $\arccos a$ определены тогда и только тогда, когда[1] $|a| \leqslant 1$.

Эти формулы полезно просто помнить наизусть. Однако они резко упрощаются в некоторых частных случаях, и запоминать их все представляется уже несколько обременительным.

Поэтому не менее полезно уметь иллюстрировать эти формулы на *единичной окружности*. Тем более что именно к ней восходит и непосредственный вывод формул корней, и само определение тригонометрических функций.

Что же касается простейших ***тригонометрических неравенств***, то решать их явно[2], как правило, не требуется. Обычно, если они и возникают в процессе решения, то носят лишь второстепенный характер и могут быть учтены каким-либо косвенным образом: например, алгебраически (при отборе значений тригонометрической функции) или на единичной окружности (при отборе значений аргумента).

---

[1] В противном случае и соответствующие уравнения не имеют решений.

[2] То есть доводить до ответа.

Знание следующих *основных тригонометрических формул* совершенно необходимо:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ — *основное тригонометрическое тождество*;
$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\quad \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ — *синус двойного угла*;
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ — *косинус двойного угла*.

Пример 6.1. Найдите все корни уравнения

$$\sin 2x - 3 = 3\cos 2x$$

на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\sin 2x - 3 = 3\cos 2x;$$
$$2\sin x\cos x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3(\cos^2 x - \sin^2 x);$$
$$\cos x(\sin x - 3\cos x) = 0.$$

Рассмотрим случаи:

1) $\cos x = 0$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$,

причём $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ при $n = -1 \quad (x = -\frac{\pi}{2})$;

2) $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x = 3 \end{cases}$

$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$,

причём $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ при $k = 0 \quad (x = \operatorname{arctg} 3)$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 3$.

Существует также масса полезных *вспомогательных* тригонометрических формул (каждая из которых справедлива только на общей области определения её левой и правой частей):

$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ — *косинус двойного угла*;

$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ — *тангенс двойного угла*;

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ — *синус суммы*;

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ — *синус разности*;

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ — *косинус суммы*;

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ — *косинус разности*;

$\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ — *тангенс суммы*;

$\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ — *тангенс разности*;

$2\sin^2 \dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$ — *синус половинного угла*;

$2\cos^2 \dfrac{x}{2} = 1 + \cos x$ — *косинус половинного угла*;

$\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ — *тангенс половинного угла*;

$\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ — *тангенс половинного угла*;

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

(где $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$) — *формулы универсальной подстановки*;

$\sin x + \sin y = 2\sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x-y}{2}$;

$\sin x - \sin y = 2\sin \dfrac{x-y}{2} \cdot \cos \dfrac{x+y}{2}$;

$\cos x + \cos y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x-y}{2}$;

$\cos x - \cos y = -2\sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \sin \dfrac{x-y}{2}$;

$2\sin x \cdot \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$;

$2\cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$;

$2\sin x \cdot \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

Кроме того, целый ряд формул, называемых *формулами приведения*, получается применением единого механизма к функциям определённого вида. А именно, пусть заданы тригонометрическая функция f и целое число n, тогда выражение $f\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$ приводится к виду $\pm g(x)$, причём:

• если n чётно, то функция g совпадает с функцией f, а если нечётно — то с кофункцией[1] для f;

• перед $g(x)$ ставится знак, одинаковый для всех x и совпадающий со знаком исходного выражения $f\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Пример 6.2. Решите уравнение

$$\sqrt{6\sin x}+2\cos x=0.$$

Решение.

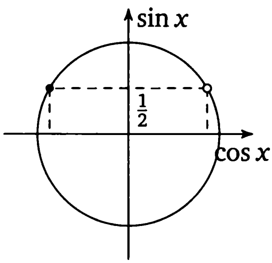
$$\sqrt{6\sin x}+2\cos x=0;$$

$$\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ 6\sin x=4\cos^2 x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ 3\sin x=2(1-\sin^2 x);\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ (\sin x+2)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ \sin x=\frac{1}{2}.\end{cases}$$



Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

[1] Кофункцией для синуса служит косинус, для косинуса — синус и т. д.

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $(\arccos x)^2 - 6\arccos x + 8 = 0$.

2. $\cos x(2\cos^2 x - 1) = \frac{1}{4}$.

3. $4\sin 2x\cos 2x - 3\sin^2 2x = 1$.

4. $2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

5. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x$.

6. $2\sin x\cos x - 6(\sin x - \cos x) + 6 = 0$.

7. $\sin 2x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\cos 2x = 1$.

8. $(3 - \operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x = 2(1 + \cos 2x)$.

9. $\operatorname{tg} 2x = 4\cos^2 x - \operatorname{ctg} x$.

10. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{ctg}(\pi\sin x)$.

11. $2\sin^2 x + \sin(x^2) = 1$.

12. $\operatorname{tg} x = (2 + \sqrt{3})\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

13. $\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 7x = 1$.

14. $\begin{cases} \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0, \\ \pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \cos 2x + \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{2}} = 0, \\ \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$

16. $\sqrt{\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x - 3\cos^2 x + \cos x + \frac{13}{4}} = \sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2}$.

17. $\sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos x$.

18. $\operatorname{tg}(\pi \cdot \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \cdot \operatorname{ctg} x)$.

19. $2\cos x + \sqrt{2}\sin 28x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x \cdot \sin x$.

20. $\operatorname{tg}(14x) + 3\operatorname{ctg}(14x) + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}$.

21. $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})\right) = 1, \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

22. $\sqrt{15x^2+2y^2-2z^2-3\sqrt{5}x-2y+10z-4}+$
$$+\sqrt{5x^2-2\sqrt{5}x\cos(\pi y)\cos(\pi z)+1}=0.$$

23. $20\sin^2 x+9\cos x<21.$

24. $|\operatorname{tg} x|<\frac{1}{2}.$

25. $\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}\geqslant 1.$

26. $2\cos^2 x-(2+\sqrt{2})\cos x+\sqrt{2}>0.$

27. $|4\cos^2 x-1|+|4\cos^2 x|=2.$

28. $\sqrt{5-2\sin x}\geqslant 6\sin x-1.$

29. $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1.$

30. $\sqrt{2+\sin x-\sqrt{3}\cos x}>1.$

31. $6\sin x\cdot\cos x>\sin x+\cos x+1.$

32. $\arcsin\left(x^2+x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(x^2+x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

33. $\arcsin 2x=\arccos|x|.$

34. $\sqrt{\arcsin x}+\sqrt{\arccos x}>\sqrt{\frac{7\pi}{12}}.$

35. $\sin(\sin x)+\sin x\cdot\cos(\sin x)>0.$

36. $\left|2\sin x+2\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right|\leqslant 2.$

37. $2\cos(\arcsin x)-\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)\leqslant 0.$

38. Сколько решений имеет уравнение $\arccos(\cos 2x)=\frac{2x}{2009}$?

39. $\arcsin(\sin x)+3\arccos(\cos x)\geqslant 3x-18.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $\sin x=\frac{\pi}{3}.$

2. $\cos x=\sqrt{3}.$

3. $\sqrt{2}\cos^2 7x=\cos 7x.$

4. $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x.$

5. $2\cos 2x+\cos x=1.$

6. $\sqrt{3}\sin x-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x\cdot\sin x=\sqrt{3}.$

7. $4\sin^4 x+12\cos^2 x=7$.

8. $3\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2 x$.

9. $3\,\mathrm{tg}^2 x+7=\frac{2}{\sin^2 x}$.

10. $\sin 3x+\sin x=\sin 2x$.

11. $1-\sin 2x=\cos x-\sin x$.

12. $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

13. $3\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x=0$.

14. $\cos x+\sin x+2\sin x\cdot\cos x=1$.

15. $\cos 3x+\sin(9x+2)=0$.

16. $\mathrm{tg}\,3x=\mathrm{tg}\,x$.

17. $4\cos x+3\sin x=5$.

18. $2\cos 3x=\sqrt{3}\cos x-\sin x$.

19. $\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{tg}\,x}=2$.

20. $\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}=(\sin x+\cos x)^2$.

21. $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=5\,\mathrm{tg}\,2x+7$.

22. $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$.

23. $\sin^2 x-\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{1}{2}$.

24. $\frac{2\sin^4\frac{x}{2}-1}{\cos^4\frac{x}{2}}=2$.

25. $\sqrt{\sin x}+\cos x=0$.

26. $\sin x>\frac{1}{2}$.

27. $\cos x\leqslant-\frac{1}{2}$.

28. $\mathrm{tg}\,x<1$.

29. $\arcsin x=\arccos x$.

30. $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$.

§ 7. Комбинированные уравнения и неравенства

Одно уравнение или неравенство вполне может содержать выражения нескольких, причём самых разных, типов: степенные, логарифмические, тригонометрические и т. д.

Простейший выход из такой ситуации иногда даёт *замена неизвестной*, после которой задача приобретает стандартный вид. При этом совершенно не обязательно явно обозначать новую неизвестную отдельной буквой.

Пример 7.1. Решите неравенство

$$10^{x^{\lg x}} \cdot 10^{\sqrt{10}^{\lg^2 x}} < 1\,000\,000.$$

Решение.

$$10^{x^{\lg x}} \cdot 10^{\sqrt{10}^{\lg^2 x}} < 1\,000\,000 \quad (= 10^6),$$

$$x^{\lg x} + \sqrt{10}^{\lg^2 x} < 6,$$

$$10^{\lg^2 x} + \sqrt{10^{\lg^2 x}} - 6 < 0,$$

$$\left(\sqrt{10^{\lg^2 x}} + 3\right)\left(\sqrt{10^{\lg^2 x}} - 2\right) < 0,$$

$$\sqrt{10^{\lg^2 x}} < 2,$$

$$10^{\lg^2 x} < 4,$$

$$\lg^2 x < \lg 4,$$

$$-\sqrt{\lg 4} < \lg x < \sqrt{\lg 4},$$

$$10^{-\sqrt{\lg 4}} < x < 10^{\sqrt{\lg 4}}.$$

Ответ: $10^{-\sqrt{\lg 4}} < x < 10^{\sqrt{\lg 4}}$.

Существенно более трудными следует признать такие уравнения или неравенства, которые не сводятся к стандартному виду никакой заменой. Как правило, их решение опирается на специфические свойства функций: *монотонность, ограниченность, чётность* (нечётность), *периодичность* и т. п.

Для функций, обладающих определёнными свойствами, можно сформулировать вполне конкретные утверждения, помогающие решать некоторые уравнения или неравенства, например: *строго монотонная на всей своей области определения функция не может принимать одинаковых значений в разных точках.*

Пример 7.2. Решите уравнение
$$3^{3-2x}-\log_2(2-3x)=3^{2-3x}-\log_2(3-2x).$$

Решение.
$$3^{3-2x}-\log_2(2-3x)=3^{2-3x}-\log_2(3-2x);$$
$$3^{3-2x}+\log_2(3-2x)=3^{2-3x}+\log_2(2-3x);$$
$$f(3-2x)=f(2-3x),\quad \text{где } f(t)=3^t+\log_2 t \text{ возрастает},$$
$$3-2x=2-3x;$$
$$x=-1.$$

Ответ: $x=-1$.

Следующее утверждение связано с ограниченностью разных частей уравнения или неравенства: *если все значения левой части — не меньше, а правой — не больше некоторой константы, то левая часть — не меньше правой, а их равенство друг другу возможно только тогда, когда обе они одновременно равны этой константе.*

Пример 7.3. Решите неравенство
$$5^{2x^2-2x+1}\leqslant\sqrt{3\sin(\pi x-\operatorname{arctg}\tfrac{4}{3})+4\cos(\pi x-\operatorname{arctg}\tfrac{4}{3})}.$$

Решение.
$$5^{2x^2-2x+1}\leqslant\sqrt{3\sin(\pi x-\varphi)+4\cos(\pi x-\varphi)},$$
где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, причём $\sin\varphi=\frac{4}{5}$ и $\cos\varphi=\frac{3}{5}$,
$$\sqrt{5}^{4x^2-4x+2}\leqslant\sqrt{5}\sqrt{\cos\varphi\cdot\sin(\pi x-\varphi)+\sin\varphi\cdot\cos(\pi x-\varphi)};$$
$$\sqrt{5}^{(2x-1)^2+1}\leqslant\sqrt{5}\sqrt{\sin\pi x};$$
$$\sqrt{5}^{(2x-1)^2+1}=\sqrt{5}=\sqrt{5}\sqrt{\sin\pi x},\quad \text{т. к. } \sqrt{5}^{(2x-1)^2+1}\geqslant\sqrt{5}\geqslant\sqrt{5}\sqrt{\sin\pi x};$$
$$\begin{cases}2x-1=0,\\ \sin\pi x=1;\end{cases}$$
$$x=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

Тренировочные задачи

1. Сколько различных корней имеет уравнение
$$\sqrt{6x^2+2\sqrt{3}x+3} = -2x?$$

2. Сколько различных корней имеет уравнение
$$\sqrt{6}(x^2+2)+2\sqrt{5}x = \sqrt[4]{35}(x^2-2)+2\sqrt{7}x?$$

Решите следующие уравнения и неравенства:

3. $\left(4|x-1|+\frac{1}{2}\right)^2 = 11(x-1)^2+\frac{5}{4}.$

4. $\dfrac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \leqslant \sqrt{4x-3}.$

5. $\sqrt{\log_{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}(x-2)} \geqslant 1.$

6. $\frac{1}{8}(\log_2(3x-2)^4)^2 = \dfrac{\lg(2-3x)}{\lg 2}7^{2\log_7\sqrt{3}}.$

7. $\log_2\dfrac{1}{|x-1|-1} = 1.$

8. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x} = 162.$

9. $2 < \left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)-4\right| \leqslant 3.$

10. $1+\log_{\frac{1}{4}}(\log_3(4-x)) > 0.$

11. $\log_{\sqrt[4]{9}}(\log_{\frac{1}{3}}(x+2)) \geqslant 2.$

12. $\log_3\left(\log_{\frac{1}{8}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x-\frac{1}{2}\right)\right) \leqslant -1.$

13. $2\log_{\sqrt{2}}3+\log_{\sqrt{2}}\left(3^{x^2-3}-\frac{1}{9}\right) < \log_{\sqrt{2}}26.$

14. $\log_2\left(\log_3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right) < \log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right).$

15. $3^{\frac{(\log_3 x)^2}{4}} \leqslant \dfrac{x^{\frac{(\log_3 x)}{3}}}{3}.$

16. $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leqslant 1.$

17. $\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+2}-4^x) \geqslant -2.$

18. $\log_x(\log_9(3^x-9)) < 1.$

19. $\dfrac{(x-0{,}5)(3-x)}{\log_2|x-1|} > 0.$

20. $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)>-2.$

21. $\log_{\frac{4}{3}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})+\log_{\frac{4}{9}}(\frac{2}{3})\geqslant 0.$

22. $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1)\geqslant 1.$

23. $\log_x 2x\leqslant\sqrt{\log_x(2x^3)}.$

24. $\log_4(3^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x-1}{16}\right)\leqslant\frac{3}{4}.$

25. $\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+4\log_2\sqrt{x}}<\sqrt{2}(4-\log_{16}x^4).$

26. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\geqslant 2.$

27. $\left(\frac{x}{10}\right)^{(\lg x)-2}<100.$

28. $49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\geqslant 0.$

29. $\dfrac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|2^x-3|}\geqslant 1.$

30. $(4x^2-16x+7)\log_2(x-3)>0.$

31. $\dfrac{\log_3(1-2x-x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x+1+\sqrt{2})}\geqslant 0.$

32. $\log_{(2-5x)}3+\dfrac{1}{\log_2(2-5x)}\leqslant\dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}.$

33. $\sqrt{17\cdot 9^x-4^x}\geqslant 3^x-3\cdot 2^x.$

34. $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+2}-x+4)\geqslant -1+\log_{\frac{1}{2}}3.$

35. $\log_{2x-3}(\sqrt{x+2}+x-3)\leqslant 1.$

36. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}>1.$

37. $(2+\sqrt{3})^x+2<(2-\sqrt{3})^x.$

38. $\log_{(\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3})}(4x-x^2-2)\geqslant 0.$

39. $\left(\frac{\lg x}{2}\right)^{\lg^2x+\lg x^2-2}=\lg\sqrt{x}.$

40. $9^{-|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|+|x-1|}.$

41. $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}.$

42. $x^2 2^{2x}+9(x+2)2^x+8x^2\leqslant(x+2)2^{2x}+9x^2 2^x+8x+16.$

43. $x^{\left(\frac{1}{2}\log_2^3x-\frac{15}{2}\log_x 2\right)}\leqslant\sqrt{2}.$

44. $x^{\lg^2 x+\lg x^3+3} \leqslant \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$.

45. $\log_{x^2}\left(\dfrac{4x-5}{|x-2|}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

46. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leqslant 1$.

47. $\dfrac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2} \geqslant 0$.

48. $\log_2\left(\sqrt{x^2-4x}+3\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+1$.

49. $\sqrt{4-x}-2 \leqslant x|x-3|+4x$.

50. $x\left(3x+2-2\sqrt{3-2x-x^2}\right) \geqslant 3|x|$.

51. $5^{\log_x 2}\cdot\log_2 x+5^{\log_2 x}\cdot\log_x 2 \leqslant 10$.

52. $(x+\frac{8}{x})\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right| \geqslant 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|$.

53. $\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4}+2\right| \geqslant -3+\log_{\frac{1}{x+1}}\sqrt{(x-2)^6}$.

54. $2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x}-(2^{\frac{3}{2}}-1)4^{\cos^2 x}=-(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)}$.

55. $2\sin^2(\pi 2^{x+1})-4\sin(\pi 2^{x+1})+\sin(\pi 2^{x+2})+4\sin^2(\pi 2^x)=0$.

56. $|\cos x|^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$.

57. $\log_{\frac{4-x^2-3x}{8}}(\cos x-\cos 3x)=\log_{\frac{4-x^2-3x}{8}}(\sin 2x)$.

58. $\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin^2 x-\dfrac{5}{12}} < -1$.

59. $\log_{(\sin x-\cos x)}(\sin x-5\cos x) \geqslant 1$.

60. $\sqrt{4\sin^2 x-1}\cdot\log_{\sin x}\dfrac{x-5}{2x-1} \geqslant 0$.

61. $\log_2\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)=\dfrac{1}{y^2-2y+2}$.

62. $\log_3|\pi x|+\log_{|\pi x|}3=\dfrac{2}{\sin^2(x+y)-2\sin(x+y)+2}$.

Подготовительные задачи

Решите уравнения и неравенства

1. $\sqrt{x^2+x+4} \leqslant 2x+|3x-2|$.

2. $\sqrt{|x+1|-1} \geqslant \sqrt{|x+1|-2010}$.

3. $\log_2\left|1+\dfrac{9}{x^2}\right|<1$.

4. $\left|\log_3(x+2)\right|>2$.

5. $\log_{\frac{1}{5}}(26-3^x)+2<0$.

6. $5^{\log_3 \frac{2}{x+2}}<1$.

7. $\dfrac{\log_2(x+1)}{x-1}>0$.

8. $\dfrac{1-\log_{0,5}(-x)}{\sqrt{2-6x}}<0$.

9. $\sqrt{\log_2\left(\dfrac{3-2x}{1-x}\right)}<1$.

10. $\dfrac{3^x-2}{x^2-6x+5}\leqslant 0$.

11. $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$.

12. $x^{2\lg x}=10x^2$.

13. $\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\lg x-2}<100$.

14. $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000$.

15. $3^{72}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}>1$.

16. $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$.

17. $2^x+2^{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}$.

18. $\log_3(3^x-6)=x-1$.

19. $\log_3(4^x-3)+\log_3(4^x-1)=1$.

20. $\log_6 2^{x+3}-\log_6(3^x-2)=x$.

21. $\lg\sqrt{x+1}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}$.

22. $2(\lg 2-1)+\lg(5^{\sqrt{x}}+1)=\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5)$.

23. $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{x^{-1}}=2$.

24. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)}>1$.

25. $\log_{\frac{4}{3}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})+\log_{\frac{4}{9}}\dfrac{2}{3}\geqslant 0$.

26. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$.

27. $(0{,}5)^{\log_3\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)\right)}<1.$

28. $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_3 x>1.$

29. $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}}\geqslant 2.$

30. $\log_{(x^2+2x-3)} \dfrac{|x+4|-|x|}{x-1}>0.$

31. $81^{(\sin 2x-1)\cos 3x}-9^{(\sin x-\cos x)^2}=0.$

32. $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^{\sin x}+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^{\sin x}=\dfrac{10}{3}.$

33. $\log_{\frac{-6x-x^2}{10}}(\sin 3x+\sin x)=\log_{\frac{-6x-x^2}{10}}\sin 2x.$

Диагностическая работа 1

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{4^x+2x-4}{x-1} \leqslant 2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x} \geqslant 1.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqslant \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|.$$

7. Решите уравнение

$$(2\sin^2 x - 3\sin x + 1)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0.$$

8. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2+2x-x^2}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2} \leqslant 0.$$

Диагностическая работа 2

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3} < 4.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-x-6}+3x+10}{x+4} > 1.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2^x+x-10}{2^x-8} \leqslant 1.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-x-6}+3x+10}{x+4} > 1.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2} \geqslant -3x.$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt[4]{12}\sin x = \sqrt{\sin 2x}.$$

8. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\lg x}\right) \geqslant -1+\lg x.$$

Диагностическая работа 3

1. Решите неравенство
$$\frac{2x+3}{3x+2} \geqslant \frac{4x+1}{x+4}.$$

2. Решите неравенство
$$\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 > 0.$$

3. Решите неравенство
$$x^2 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0.$$

4. Решите неравенство
$$(x+1)\log_8(x^2+2x-2) < 0.$$

5. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leqslant 0.$$

6. Решите неравенство
$$\frac{x^2-1}{|x|-1} > 0.$$

7. Решите уравнение
$$(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - 2 + \sin x = 2\cos x.$$

8. Решите неравенство
$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(x+2)}{x}.$$

Диагностическая работа 4

1. Решите неравенство

$$\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3}<\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)}>1.$$

3. Решите неравенство

$$(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}\leqslant(\sqrt{5}+2)^{x-1}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{x^2}(x^2+x-1)<0.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\leqslant 0.$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

8. Решите неравенство

$$\frac{(|2x+1|-x-2)(\log_{\frac{1}{3}}(x+4)+1)}{2^{x^2}-2^{|x|}}\geqslant 0.$$

Диагностическая работа 5

1. Решите неравенство

$$\frac{\frac{1}{x-1}-1}{1-\frac{1}{x-7}} \geqslant 0.$$

2. Решите неравенство

$$(x^2+3x)(2x+3)-16\frac{2x+3}{x^2+3x} \geqslant 0.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^2-2x-15)^{\frac{3}{2}}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leqslant 1.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \leqslant \log_{1-x}(1-2x).$$

5. Решите неравенство

$$\sqrt{4x-x^2-3} \geqslant \sqrt{x^2-7x+12}-\sqrt{x^2-5x+6}.$$

6. Решите неравенство

$$||x^2-8x+2|-x^2| \geqslant 2x+2.$$

7. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x-2\cos x-1}=0.$$

8. Решите уравнение

$$\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2-4x-2)=\log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2-4x-3).$$

Диагностическая работа 6

1. Решите уравнение
$$\frac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{10}{9}.$$

2. Решите уравнение
$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}.$$

3. Решите неравенство
$$\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x}>\left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}.$$

4. Решите неравенство
$$\frac{\log_{1-4x^2}(|x|-4)^2}{\log_{1-4x^2}(10x^2+5x+\frac{1}{2})}\leqslant 2.$$

5. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\geqslant\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

6. Решите неравенство
$$\frac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6}\geqslant 0.$$

7. Найдите все решения неравенства
$$\sqrt{6\cos x-\sin x+4}<\sin x+\cos x$$
принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

8. Решите неравенство
$$x\geqslant\log_2(101\cdot 10^x-10^{2+2x})-\log_5(101\cdot 2^x-5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}).$$

Рекомендуемая литература

Для прохождения школьного курса математики необходим комплект школьных учебников, желательно из федерального комплекта, утверждённого Министерством образования РФ. При этом для подготовки к ЕГЭ, кроме учебников по математике, предназначенных для 10—11 классов, нужны также учебники по планиметрии для 7—9 классов и по алгебре для 8—9 классов.

Кроме учебников, особенно для изучения приёмов решения уравнений и неравенств, рекомендуем использовать проверенные временем методические пособия, задачники по элементарной математике, сборники конкурсных задач по математике. Вот некоторые из них.

1. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М. И. Сканави. М.: Высшая школа, 1998 и др. издания.

2. *Моденов П. С.* Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. М.: Высшая школа, 1960.

3. *Моденов В. П.* Пособие по математике. Части I—II. М.: Издательство московского университета, 1977.

4. *Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.* Математик для поступающих в вузы. М.: Дрофа, 1976 и др. издания.

5. *Мельников И. И., Сергеев И. Н.* Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. М. Учебно-научный центр довузовского образования МГУ, 1994.

6. *Шабунин М. И.* Математика для поступающих в вузы. М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.

7. *Сергеев И. Н.* 1000 вопросов и ответов. Математика. М.: Университет книжный дом, 2000.

8. *Сергеев И. Н.* Математика задачи с ответами и решениями. М.: КДУ, 2003.

9. *Сергеев И. Н.* ЕГЭ. Математика. Задания типа С. М.: Экзамен, 2009.

10. *Шарыгин И. Ф.* Решение задач. М.: Просвещение,1994.

11. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. Решение задач. М.: Просвещение, 1991.

12. *Голубев В. И.* Решение сложных и нестандартных задач по математике. М.: ИЛЕКСА, 2007.

13. Вступительные экзамены и олимпиады по математике / Под ред. И. Н. Сергеева. М.: Механико-математический факультет МГУ, разные годы.

14. Задачи вступительных экзаменов по математике / Под ред. Е. А. Григорьева. М.: Факультет Вычислительной математики и кибернетики МГУ, разные годы.

15. *Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф.* Сборник конкурсных задач по математике. М.: Наука, 1986.

16. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Факториал, 1995.

17. *Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И.* Подготовка к ЕГЭ по математике. 2010. М.: МЦНМО, 2009.

18. *Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И.* Математика. ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь. М.: Экзамен, 2010.

19. Математика. Сборник тренировочных работ / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. М.: МЦНМО, 2009.

20. Математика. ЕГЭ-2010. Типовые тестовые задания / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. М.: Экзамен, 2009.

21. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ-2010. Математика / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. М.: Астрель, 2009.

22. *Панфёров В. С., Сергеев И. Н.* Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач. ФИПИ; М.: Интеллект-Центр, 2010.

Мы не считаем, что все перечисленные пособия должны находиться в личной библиотеке абитуриента, да это и невозможно. Однако каждая из них по-своему полезна и найдёт своего благодарного читателя.

Ответы

Ниже допускаются ответы в разной форме: как в виде множеств, так и в виде равенств или неравенств (возможно, двойных). Как отмечалось ранее, главной характеристикой ответа была и остаётся его математическая правильность.

Диагностическая работа

1. $-1 \leqslant x \leqslant 2{,}5$. **2.** $x < -3$, $0 \leqslant x < 1$, $x = 3$. **3.** $x < -2$, $x > -2$. **4.** $x < -5$, $-2 \leqslant x < 2$, $x > 2$. **5.** $x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$. **6.** $-2 < x < -1$, $3 < x < 5$. **7.** $x = 2$. **8.** $-7 \leqslant x < -6$, $-5 \leqslant x \leqslant -1$, $x = 1$. **9.** $1 \leqslant x \leqslant 3$. **10.** $-2 < x < 2$, $2 < x < 14$. **11.** $x < -3$, $0 < x < 1$. **12.** $x = -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 3$. **13.** $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **14.** $10^{-\sqrt{\lg 4}} < x < 10^{\sqrt{\lg 4}}$. **15.** $x = -1$. **16.** $x = \frac{1}{2}$.

§ 1. Рациональные уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x = 1, x = 2009$. **2.** $x = 1, x = -2011$. **3.** $x = -1, x = -2010$. **4.** $1 < x < 2009$. **5.** $-2011 \leqslant x \leqslant 1$. **6.** $x \leqslant -2010$, $x \geqslant -1$. **7.** $x = -3$, $x = 1$. **8.** $-3 < x < 1$. **9.** $x = -1$. **10.** $x = -1$. **11.** $x = -4, x = 2$. **12.** $x = -1, x = 12$. **13.** $-1 < x < 12$. **14.** $x = -2$, $x = 6$, $x = 3 - \sqrt{21}$, $x = 3 + \sqrt{21}$. **15.** $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 4)$. **16.** $(-\infty; -2] \cup (-1; 4)$. **17.** $(-\infty; -5] \cup (1; 2) \cup (6; +\infty)$. **18.** $-1 < x < 5$. **19.** $(-5; 1) \cup \{3\}$. **20.** $[1; 2) \cup (2; 4]$. **21.** $(-\infty; -1] \cup (4; +\infty)$. **22.** $(-1; 0) \cup$ $\cup (0; 1)$. **23.** $(-5; 1)$. **24.** $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (-2; \sqrt{7}) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **25.** $[1; 2) \cup$ $\cup (3; 4]$. **26.** $\left(-\frac{11 + \sqrt{737}}{28}; \frac{4}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{737} - 11}{28}; 1\right)$. **27.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **28.** $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. **29.** $(-5; 1) \cup (2; 3)$. **30.** $(-\infty; -3) \cup$ $\cup (-2; -1)$. **31.** $(-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$. **32.** $(-\infty; -1] \cup (0; 1] \cup (2; 3]$. **33.** $-6 < x \leqslant 0, 2 < x < 3, x \geqslant 6$. **34.** $-5 \leqslant x \leqslant 1, 2 < x < 3$. **35.** $x < -9$, $\frac{2}{3} < x < 1$, $x \geqslant \frac{11}{2}$. **36.** $1 < x \leqslant 2, 7 < x < 8$. **37.** $x \leqslant -1, 2 \leqslant x < \frac{11}{4}$, $\frac{11}{4} < x \leqslant 3, x \geqslant 4$.

Подготовительные задачи

1. $x = 1, x = \frac{4}{3}$. **2.** $1 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$. **3.** решений нет. **4.** любое число. **5.** $x = -\frac{2}{3}, x = 3$. **6.** $x < -\frac{2}{3}, x > 3$. **7.** $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x = -1, x = 1, x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **8.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < -1$, $1 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **9.** $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$. **10.** $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. **11.** $x = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, x = \sqrt[3]{3}$. **12.** $x < -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $x > \sqrt[3]{3}$. **13.** $(1; 2) \cup (2; 3)$. **14.** $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$. **15.** $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; +\infty\right)$. **16.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{4}{5}$. **17.** $x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$.

18. любое действительное число. **19.** $x \leqslant 2$, $x \geqslant 4$. **20.** $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$. **21.** $(-\infty; 1) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **22.** $-7<x<-3$. **23.** $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. **24.** $(-\infty; 0) \cup \cup (3; +\infty)$. **25.** $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **26.** $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right] \cup [8; +\infty)$. **27.** $(-\infty; -20) \cup \cup (23; +\infty)$. **28.** $(-1; 0) \cup (4; +\infty)$. **29.** $[1; 3] \cup (5; +\infty)$. **30.** $-1 < x$. **31.** $\left(-\frac{9}{2}; -2\right) \cup (3; +\infty)$. **32.** $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **33.** $3 < x < 4$. **34.** $[-3; 0) \cup [20; +\infty)$. **35.** $(-\infty; -1] \cup (5; 6]$. **36.** $3<x$. **37.** $x<-\sqrt{2}, x>\sqrt{2}$. **38.** $-2<x<2$. **39.** $x<0, 0<x<1$. **40.** $-4 \leqslant x < -1, -1<x \leqslant 2$.

§ 2. Показательные уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x=2$. **2.** $x=-1$. **3.** $x=1$. **4.** $x=1$, $x=2$. **5.** $x=\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{3}{2}$. **6.** $x=3$. **7.** $x=0$. **8.** $x=0, x=2$. **9.** $x=10$. **10.** $x=\pm 1$. **11.** $x=-2, x=2$. **12.** $x=\frac{1}{4}$. **13.** $x=4$. **14.** $x=1, x=3$. **15.** $x=2$. **16.** $x=-\log_5 2, x=3$. **17.** $x<\frac{1}{2}, x>1$. **18.** $x \neq 2$. **19.** $x>-2$. **20.** $x<0$, $x>\log_4 3$. **21.** $x \in \mathbb{R}$. **22.** $x<0$, $x \geqslant 1$. **23.** $x>0$. **24.** $x<\log_{0,4} 2$. **25.** $-\frac{1}{2}<x<0$. **26.** $0<x<\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$. **27.** $x \leqslant \log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 \frac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \frac{5}{3}$. **28.** $x>\frac{1}{6}$. **29.** $-1<x<\frac{2}{3}$. **30.** $x<3-\sqrt{3}$, $x>3+\sqrt{3}$. **31.** $x>\frac{\lg 21}{\lg 5-\lg \sqrt{7}}$. **32.** $\frac{1}{2}\log_5 6<x<\log_6 5$.

Подготовительные задачи

1. $x=2$, $x=4$. **2.** $x=1$. **3.** $x=\frac{38}{3}$. **4.** $x=1$. **5.** $x=\log_{\frac{7}{3}} \frac{13}{8}$. **6.** $x=2$. **7.** $x=0$. **8.** $x=\pm 2$. **9.** $x=2$. **10.** $x=-2$. **11.** $x=2-\sqrt{\frac{7}{2}}$, $x=2+\sqrt{\frac{7}{2}}$. **12.** $x=0$. **13.** $x=0$. **14.** $x=-2$. **15.** $x=\log_{\frac{2}{7}} 3$. **16.** $x<\frac{1}{2}$. **17.** $x>-\frac{3}{4}$. **18.** $x<7$. **19.** $x<-\frac{1}{2}$, $x>\frac{5}{8}$. **20.** $\frac{5}{3}<x<2$. **21.** $1<x<4$. **22.** $x \leqslant 2$. **23.** $0<x<1$. **24.** $x>0$. **25.** $x<\log_5 10$. **26.** $x<\log_{0,4} 2$. **27.** $-\frac{1}{2}<x<0$. **29.** $x<0, 1<x<3$. **30.** $0<x<\frac{1}{3}, x>4$.

§ 3. Логарифмические уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x=1+\sqrt[3]{2}$. **2.** $x=3$. **3.** $x=2^{-1}, x=2^{-\frac{1}{8}}$. **4.** $x=2^{-2}, x=2^{-\frac{1}{4}}$. **5.** $x=2^{-3}$, $x=2$. **6.** $x=1$. **7.** $x=100$. **8.** $x=5$. **9.** $x=\frac{1}{81}$, $x=\frac{1}{3}$. **10.** $x=-\frac{3-\sqrt{3}}{3}$,

$x=8$. **11.** $x=\frac{1}{9}$, $x=3$. **12.** $x=2$. **13.** $x=2$, $x=1-\sqrt{33}$. **14.** $x=4$. **15.** $x=8$. **16.** $x=\frac{11\pm\sqrt{261}}{5}$. **17.** $1<x<2$, $3<x<4$. **18.** $-1\leqslant x<1$, $3<x\leqslant 5$. **19.** $\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{2}{3}$. **20.** $0<x<10$. **21.** $2<x<3$, $x>3$. **22.** $x>3$. **23.** $0<x\leqslant\frac{5}{8}$, $2\leqslant x<4$. **24.** $\frac{1}{2}<x<1$. **25.** $-3<x<1$, $3<x<4$. **26.** $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $x>2$. **27.** $0<x<2$, $x>4$. **28.** $-1<x<0$. **29.** $0<x<\frac{2}{\sqrt{5}}$, $1<x<3$. **30.** $3<x<4$, $x>6$. **31.** $2^{-\sqrt{2}}<x<\frac{1}{2}$, $1<x<2^{\sqrt{2}}$.

Подготовительные задачи

1. $x=0$. **2.** $x=\frac{3}{2}$, $x=10$. **3.** $x=1$. **4.** $x=-2-\sqrt{10}$. **5.** $x=\frac{1}{10}$, $x=10$. **6.** $x=10$, $x=10000$. **7.** $x=\frac{1}{4}$, $x=2$. **8.** $x=3$. **9.** $x=-4$. **10.** $x=3$. **11.** $x=4$. **12.** $x=\frac{1}{2}$, $x=16$. **13.** $x=-\frac{9}{5}$, $x=23$. **14.** $x=2$. **15.** $x=\frac{1}{2}$, $x=128$. **16.** $\frac{1}{5}<x<\frac{2}{5}$. **17.** $\frac{1}{3}<x<2$. **18.** $2<x<3$. **19.** $\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{2}$. **20.** $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$. **21.** $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, $2<x\leqslant 4$. **22.** $\frac{1}{10}<x<1$, $1<x\leqslant 10$. **23.** Решений нет. **24.** $1<x\leqslant 2$, $3\leqslant x<4$. **25.** $-\sqrt{5}<x<-2$, $1<x<\sqrt{5}$. **26.** $2<x<3$. **27.** $-3<x<-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}<x<3$. **28.** $4<x$. **29.** $0<x<1$, $\sqrt{3}<x<9$. **30.** $1<x<4$.

§ 4. Иррациональные уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x=0$. **2.** $x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$. **3.** $x=-\sqrt{3}$. **4.** $x=-5$. **5.** $x=5$. **6.** $x=8$. **7.** $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **8.** $x=9$. **9.** $x=2$. **10.** $x=-\frac{8}{3}$, $x=1$. **11.** $x=7$. **12.** $x=1$, $x=2$, $x=10$. **13.** $x=3\frac{1}{63}$, $x=3\frac{1}{728}$. **14.** $5\leqslant x\leqslant 10$. **15.** $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{5}$, $x=\frac{4}{5}$. **16.** $-1\leqslant x\leqslant 1$. **17.** $\frac{19}{3}\leqslant x<9$. **18.** $x\leqslant -2$, $-1\leqslant x<\frac{\sqrt{13}-1}{6}$. **19.** $x\leqslant -5$, $-\frac{4}{3}\leqslant x<4$. **20.** $x<-1$, $x>\frac{5}{3}$. **21.** $1\leqslant x$. **22.** $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x\leqslant 1$. **23.** $-1\leqslant x<8$. **24.** $1<x<2$, $2<x<\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. **25.** $1<x<\frac{5}{4}$, $\frac{5}{3}<x$. **26.** $0\leqslant x\leqslant 5$. **27.** $1<x\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **28.** $-1-\sqrt{13}\leqslant x\leqslant 0$, $\frac{1+\sqrt{17}}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{13}-1$. **29.** $x>\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$. **30.** $-5\leqslant x<2\sqrt{\sqrt{5}-2}-4$. **31.** $3\leqslant x<6$, $6<x<\frac{133}{2}-11\sqrt{6}$.

Подготовительные задачи

1. $x=6$. **2.** $x=\frac{1}{2}$, $x=1$. **3.** $x=-\sqrt{\frac{7}{3}}$, $x=\sqrt{\frac{7}{3}}$. **4.** $x=2$. **5.** $x=3$. **6.** $x=-8$, $x=27$. **7.** $x=1$. **8.** $x=\frac{5}{3}$. **9.** $x=3$. **10.** $x=-3$. **11.** $x=-\frac{5}{6}$. **12.** $x=4$.

13. $x=0,\ x=-\frac{3}{2}$. **14.** $x=5$. **15.** $x=-1$. **16.** $\frac{1}{2}<x\leqslant 2$. **17.** $4<x\leqslant 6$. **18.** $-1-\sqrt{5}<x\leqslant -3,\ 1\leqslant x<\sqrt{5}-1$. **19.** $x<1$. **20.** $x=-1,\ x\geqslant 2$. **21.** $-\frac{1}{2}<x$. **22.** $5<x$. **23.** $\frac{5}{2}\leqslant x<3$. **24.** $-1\leqslant x<0,\ \frac{3}{5}<x\leqslant 1$. **25.** $-2\leqslant x<2$. **26.** $x<1$. **27.** $-33\leqslant x<3$. **28.** $x\leqslant -3$. **29.** $1<x$. **30.** $1\leqslant x<\frac{3}{2}$.

§ 5. Уравнения и неравенства с модулем

Тренировочные задачи

1. $x=-1,\ x=1$. **2.** $x=0,\ x=\frac{70}{13},\ x=\frac{13}{2}$. **3.** $x=-25,\ x=3$. **4.** $x\leqslant\frac{4}{7}$. **5.** $x=-2$. **6.** $x=-12,\ 0\leqslant x\leqslant 6$. **7.** $x=1$. **8.** $-\frac{7}{2}\leqslant x\leqslant\frac{15}{2}$. **9.** $2\leqslant x\leqslant 3$. **10.** $x=1, x=4$. **11.** $x<\frac{1}{3},\ x>3$. **12.** $-9<x<0$. **13.** $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. **14.** $2<x<5$. **15.** $-5<x<3+2\sqrt{2}$. **16.** $x\leqslant -5-\sqrt{19},\ x\geqslant\sqrt{2}-2$. **17.** $-7<x<-2,\ 3<x<4$. **18.** $-6\leqslant x\leqslant -1,\ x\geqslant 0$. **19.** $x<2\sqrt{2},\ x>2+2\sqrt{3}$. **20.** $-\frac{3+\sqrt{65}}{2}<x<3$. **21.** $-\frac{9+\sqrt{57}}{4}<x<-2,\ -2<x<-1,\ x>\frac{3}{2}$. **22.** $x<-199,\ -66<x<200$. **23.** $x<0,\ 2<x$. **24.** $-3\leqslant x<-2,\ 0<x\leqslant\sqrt{3}$. **25.** $x<-2,\ x>-1$. **26.** $-5<x<-2,\ 2<x<3,\ 3<x<5$. **27.** $\frac{3}{2}\leqslant x<2$. **28.** $x<3$. **29.** $x\leqslant -1,\ x\geqslant 0$. **30.** $0\leqslant x\leqslant\frac{8}{5},\ x\geqslant\frac{5}{2}$.

Подготовительные задачи

1. $x\geqslant 1$. **2.** $x=\frac{4}{3}$. **3.** $x=-\frac{9}{2},\ x=\frac{13}{4}$. **4.** $x\geqslant 2$. **5.** $x=-3,\ x=3$. **6.** $x\leqslant\frac{3}{2}$. **7.** $x=-1,\ x=1$. **8.** $x=1,\ x=13$. **9.** $x=3,\ x=4$. **10.** $x=-4,\ x=-1$. **11.** $2<x<3$. **12.** $x\leqslant\frac{1}{6},\ x\geqslant\frac{3}{2}$. **13.** $x\geqslant -1$. **14.** $x\leqslant -2,\ x\geqslant 2$. **15.** $x>\frac{9}{2}$. **16.** Решений нет. **17.** $-3<x<-2,\ 2<x<3$. **18.** $-2\leqslant x\leqslant 2$. **19.** $-1<x<2,\ 3<x<6$. **20.** $1\leqslant x\leqslant 3$. **21.** $2<x<4$. **22.** $1\leqslant x\leqslant 3$. **23.** $x\leqslant\frac{4-\sqrt{19}}{3},\ x\geqslant\frac{4+\sqrt{19}}{3}$. **24.** $1<x<3$. **25.** $-1<x<0,\ 0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. **26.** $x\leqslant -2,\ \frac{1}{2}\leqslant x<1,\ 1<x\leqslant\frac{\sqrt{73}-3}{4}$. **27.** $x\leqslant -8,\ -6<x<-2,\ x>-2$. **28.** $x<2,\ x=3,\ x>4$. **29.** $\frac{3}{7}<x<\frac{11}{7}$. **30.** $-3<x<-2,\ x=-1,\ 0<x<1$.

§ 6. Тригонометрические уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. $x=\cos 2$. **2.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{5}+2n\pi;\ x=\pm\frac{3\pi}{5}+2m\pi,\ k,n,m\in\mathbb{Z}$. **3.** $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **4.** $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **5.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

6. $x=(2k+1)\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $k,n\in\mathbb{Z}$. **7.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{7\pi}{20}+n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **8.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+m\pi$; $k,n,m\in\mathbb{Z}$. **9.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **10.** $x=2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **11.** $x=\pm1+\sqrt{1+\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $x=\pm1-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}+2k\pi}$; $k=0,1,2,\ldots$ **12.** $x=3k\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+3n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **13.** $x=\frac{2n+1}{18}\pi$; $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 9k+4$, $k\in\mathbb{Z}$. **14.** $x=\frac{21\pi}{16}$, $x=\frac{11\pi}{8}$. **15.** $x=\frac{19\pi}{12}$. **16.** $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+2n\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+2m\pi$, $k,n,m\in\mathbb{Z}$. **17.** $x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+$ $+2n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **18.** $x=\operatorname{arctg}\frac{2k+1\pm\sqrt{4k^2+4k-15}}{4}+n\pi$, $x=\pm\operatorname{arctg}2+m\pi$; $k=3,\pm4,\pm5,\ldots$, $n,m\in\mathbb{Z}$. **19.** $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **20.** $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **21.** $x=-31$, $x=-7$. **22.** $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y=2$, $z=0$; $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y=-1$, $z=5$. **23.** $2k\pi\leqslant x<\arccos\frac{1}{4}+2k\pi$, $\arccos\frac{1}{5}+2n\pi<x<-\arccos\frac{1}{5}+2(n+1)\pi$, $-\arccos\frac{1}{4}+2(m+1)\pi<x\leqslant 2(m+1)\pi$; $k,n,m\in\mathbb{Z}$. **24.** $\pi k-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<x<$ $<\pi k+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$. **25.** $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$. **26.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<-\frac{\pi}{4}+$ $+2\pi(k+1)$; $k\in\mathbb{Z}$. **27.** $x=\pm\arccos\sqrt{\frac{3}{8}}+\pi n$; $n\in\mathbb{Z}$. **28.** $\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+$ $+2(k+1)\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **29.** $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **30.** $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **31.** $2\left(\pi k+\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{2}}{7}\right)<x<2\left(\pi k+\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right)$; $k\in\mathbb{Z}$. **32.** $x=-1$, $x=0$. **33.** $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **34.** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\right)<x<\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\right)$. **35.** $2k\pi<$ $<x<(2k+1)\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **36.** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **37.** $-1\leqslant x\leqslant-\frac{7}{8}$, $x=1$. **38.** 2009. **39.** $x\leqslant\frac{4\pi+18}{5}$, $8\pi-18\leqslant x\leqslant 18-3\pi$.

Подготовительные задачи

1. решений нет. **2.** решений нет. **3.** $x=\frac{\pi}{14}+\frac{k\pi}{7}$, $x=\pm\frac{\pi}{28}+\frac{2n\pi}{7}$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **4.** $x=(2k+1)\pi$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **5.** $x=(2k+1)\pi$, $x=\pm\arccos\frac{3}{4}+$ $+2n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **6.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **7.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$. **8.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$; $n\in\mathbb{Z}$. **9.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **10.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x=\frac{n\pi}{2}$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **11.** $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=2n\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **12.** Решений нет. **13.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\operatorname{arctg}3+n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **14.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=2n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **15.** $x=-\frac{1}{3}+\frac{4k-1}{12}\pi$, $x=-\frac{1}{6}+\frac{4n-1}{24}\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **16.** $n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.

17. $x=\arccos\frac{4}{5}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **18.** $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{12}+n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **19.** $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **20.** $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ x=n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **21.** $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi,\ x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **22.** $x=\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3k\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$. **23.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4};\ k,n\in\mathbb{Z}$. **24.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **25.** $x=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **26.** $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **27.** $\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **28.** $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **29.** $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **30.** $x=\pm\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

§ 7. Комбинированные уравнения и неравенства

Тренировочные задачи

1. 2. **2.** 1. **3.** $x=\frac{4}{5},\ x=\frac{6}{5}$. **4.** $\frac{3}{4}<x\leqslant 7$. **5.** $2<x\leqslant 2+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}$. **6.** $x=\frac{1}{3},\ x=\frac{2(1-\sqrt{2})}{3}$. **7.** $x=-\frac{1}{2},x=\frac{5}{2}$. **8.** $x=\frac{1}{9},x=9$. **9.** $\left[-\frac{127}{384};-\frac{21}{64}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right]$. **10.** $-77<x<3$. **11.** $-2<x\leqslant-\frac{53}{27}$. **12.** $0\leqslant x<1$. **13.** $-2<x<-1,\ 1<x<2$. **14.** $x<-2$. **15.** $0<x\leqslant 3^{-2\sqrt{3}},\ x\geqslant 3^{2\sqrt{3}}$. **16.** $\log_3\frac{9}{10}\leqslant x<2$. **17.** $x<2$. **18.** $x>\log_3 10$. **19.** $0<x<\frac{1}{2},\ 2<x<3$. **20.** $\log_2\frac{5}{4}<x<\log_2 3$. **21.** $0\leqslant x\leqslant\frac{27}{16}$. **22.** $-2\sqrt{2}\leqslant x<-1,\ \frac{\sqrt{44}-2}{5}\leqslant x<1$. **23.** $0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ x>2$. **24.** $[1;2]$. **25.** $0<x\leqslant\frac{1}{4},\ 1\leqslant x<4$. **26.** $0<x\leqslant\frac{1}{4},\ x\geqslant 4$. **27.** $1<x<1000$. **28.** $1<x\leqslant 5^{\log_2 7}=7^{\log_2 5}$. **29.** $x>3$. **30.** $3<x<\frac{7}{2},\ x>4$. **31.** $-2\leqslant x<-\sqrt{2},\ 0\leqslant x<-1+\sqrt{2}$. **32.** $-\frac{1}{3}\leqslant x<0,\ \frac{1}{5}<x<\frac{3-\sqrt{3}}{6}$. **33.** $x\geqslant\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{17}}$. **34.** $-1\leqslant x<7,\ x=-2$. **35.** $\frac{3}{2}<x<2,\ x>2$. **36.** $x<-7,\ -5<x\leqslant-3,\ x\geqslant 2$. **37.** $x<\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1)$. **38.** $2-\sqrt{2}<x\leqslant 1,\ 3\leqslant x<2+\sqrt{2}$. **39.** $x=\frac{1}{1000},\ x=10,\ x=100$. **40.** $x=-\log_3 2,\ x=\log_3 2$. **41.** $x=-\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2},\ x\geqslant 3$. **42.** $-1\leqslant x\leqslant 0,\ 2\leqslant x\leqslant 3$. **43.** $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1,\ 1<x\leqslant 4$. **44.** $0<x\leqslant\frac{1}{100},\ \frac{1}{10}\leqslant x\leqslant 1$. **45.** $\sqrt{6}-1\leqslant x<2,\ 2<x\leqslant 5$. **46.** $x\leqslant-3,\ x=5$. **47.** $x<-2,\ -2<x<2-\sqrt{15},\ x\geqslant 6$. **48.** $-1\leqslant x\leqslant 0$. **49.** $0\leqslant x\leqslant 4$. **50.** $-3\leqslant x\leqslant\frac{8\sqrt{3}-19}{13},\ x=0,\ \frac{11}{13}\leqslant x\leqslant 1$. **51.** $0<x<1,\ x=2$. **52.** $x=3,\ x\geqslant 8$. **53.** $-1<x\leqslant\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ 0<x\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x\geqslant\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. **54.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **55.** $x=\log_2\left(k+\frac{1}{4}\right),\ k=0,1,2,\ldots;\ x=\log_2 n,\ n=1,2,\ldots$ **56.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,$

$x=n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **57.** $x=\frac{\pi}{6}$. **58.** $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **59.** $\operatorname{arctg}5+2k\pi<$ $<x<(2k+1)\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ k,n\in\mathbb{Z}$. **60.** $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi;$ $k=1,\pm2,\pm3,\ldots,\ n\in\mathbb{Z},\ -\frac{11\pi}{6}\leqslant x<-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2}<x\leqslant-4,\ x=-\frac{7\pi}{6}$. **61.** $x=k\pi,$ $y=1;\ k\in\mathbb{Z}$. **62.** $x=\frac{3}{\pi},\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi n-\frac{3}{\pi};\ x=-\frac{3}{\pi},\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi k+\frac{3}{\pi};\ k,n\in\mathbb{Z}$

Подготовительные задачи

1. $x\leqslant0,\ x\geqslant\frac{7}{8}$. **2.** $x\leqslant-2011,\ x\geqslant2009$. **3.** $x<-3,\ x>3$. **4.** $-2<x<-\frac{17}{9},$ $x>7$. **5.** $x<0$. **6.** $x>0$. **7.** $-1<x<0,\ x>1$. **8.** $-\frac{1}{2}<x<0$. **9.** $x>2$. **10.** $x\leqslant\log_3 2,\ 1<x<5$. **11.** $x=-2-\sqrt{10}$. **12.** $x=\sqrt{10^{1-\sqrt{3}}},\quad x=\sqrt{10^{1+\sqrt{3}}}$. **13.** $1<x<10000$. **14.** $x>1000$. **15.** $0\leqslant x<64$. **16.** $x=-3,\ x\geqslant-1$. **17.** $x\leqslant\log_2(\sqrt{2}-1),\ x\geqslant\frac{1}{2}$. **18.** $x=2$. **19.** $x=1$. **20.** $x=\log_3 4$. **21.** $x=0$. **22.** $x=9$. **23.** $x=10,\ x=10^4$. **24.** $(-\sqrt{2}-1;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\sqrt{2}+1)$. **25.** $0\leqslant x\leqslant$ $\leqslant\frac{27}{16}$. **26.** $1<x<4$. **27.** $-1<x<-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}<x<1$. **28.** $0<x<10^{\frac{\lg0{,}5\cdot\lg3}{\lg1{,}5}}$. **29.** $0<x\leqslant\frac{1}{4},\ x\geqslant4$. **30.** $-1-\sqrt{5}<x<-3,\ \sqrt{5}-1<x<5$. **31.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,$ $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2n\pi}{3};\ k,n\in\mathbb{Z}$. **32.** $x=\pm\arcsin\frac{\lg3}{\lg(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **33.** $x=-\frac{5\pi}{3}$.

Диагностическая работа 1

1. $x<1,\ \frac{3}{2}<x<2,\ x>3$. **2.** $-5<x<1,\ 2<x<3$. **3.** $\frac{1}{2}\leqslant x<1$. **4.** $2\leqslant x<3$. **5.** $-2\leqslant x\leqslant-1,\ x=3$. **6.** $-5\leqslant x<-4,\ -2<x\leqslant-2+\sqrt{3}$. **7.** $x=n\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+$ $+2k\pi;\ n,k\in\mathbb{Z}$. **8.** $1-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ 2<x<\frac{5}{2}$.

Диагностическая работа 2

1. $x<-1,\ x>4$. **2.** $x\leqslant-2,\ -1<x<4$. **3.** $2\leqslant x<3$. **4.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1}{2},$ $1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **5.** $x<-6,\ -4<x\leqslant-2,\ x\geqslant3$. **6.** $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant1,\ x>2$. **7.** $x=n\pi,$ $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ n,k\in\mathbb{Z}$. **8.** $\frac{1}{10}<x\leqslant\frac{1}{2}$.

Диагностическая работа 3

1. $-4<x\leqslant-1,\ -\frac{2}{3}<x\leqslant1$. **2.** $x<-2,\ -1<x<3,\ 4<x$. **3.** $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$. **4.** $x<-3,\ -1+\sqrt{3}<x<1$. **5.** $-3<x<0,\ x=\frac{1}{2},\ x=2$. **6.** $x<-1,\ -1<x<1,$ $x>1$. **7.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. **8.** $-\frac{1}{2}<x<0$.

Диагностическая работа 4

1. $-\frac{3}{2}<x<-\frac{4}{3}$, $-1<x<1$. **2.** $x<-7$, $-4<x<-2$. **3.** $-2\leqslant x<-1$, $x\geqslant 1$. **4.** $-2<x<-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **5.** $x<0$, $1\leqslant x\leqslant 2$. **6.** $x<\frac{1}{3}$. **7.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **8.** $-4<x<-1$.

Диагностическая работа 5

1. $1<x\leqslant 2$, $7<x<8$. **2.** $-4\leqslant x<-3$, $-\frac{3}{2}\leqslant x<0$, $x\geqslant 1$. **3.** $x\leqslant -3$, $x=5$. **4.** $-5<x<-2-2\sqrt{2}$, $-4\leqslant x<0$, $0<x<\frac{1}{2}$. **5.** **6.** $x\leqslant 0$, $1\leqslant x\leqslant 2$, $x\geqslant 5$. **7.** $x=(2k+1)\pi$, $x=\pi+\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2n\pi$; $k,n\in\mathbb{Z}$. **8.** $x=2+$ $+\sqrt{14+4\sqrt{3}}$, $x=2-\sqrt{14+4\sqrt{3}}$.

Диагностическая работа 6

1. $x=\frac{1}{2}$, $x=2$. **2.** $x=-\frac{2}{3}$, $x=2$. **3.** $-\sqrt{2+\sqrt{3}}<x<-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $-\sqrt{2-\sqrt{3}}<x<0$, $0<x<\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}<x<\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **4.** $-\frac{1}{2}<x<\frac{-5-\sqrt{5}}{20}$, $\frac{-5+\sqrt{5}}{20}<x<0$, $0<x<\frac{-5+\sqrt{45}}{20}$, $\frac{-3+\sqrt{44}}{10}\leqslant x<\frac{1}{2}$. **5.** $x>0$. **6.** $x\leqslant -2-\sqrt{3}$, $-0{,}3<x<$ $<-2+\sqrt{3}$, $x=1$, $x>2$. **7.** $\frac{2\pi}{3}<x\leqslant 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{21}-1}{2}$. **8.** $x\leqslant -2$, $0\leqslant x<$ $<\lg 101-2$.

Содержание

Сергеев Игорь Николаевич
Панфёров Валерий Семёнович

ЕГЭ 2011. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Подписано в печать 27.07.2010 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 4,5. Тираж 20 000 экз. Заказ № 1008320.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ЕГЭ 2011

Математика

ISBN 978-5-94057-665-5